

9	Exponential- und Logarithmusfunktionen	1
9.1	Exponentialfunktion	1
9.2	Exponentielles Wachstum und Zerfall	11
9.3	Die Zahl e	17
9.4	Logarithmen und Logarithmusfunktion	19
9.5	Anwendungen	32

9 Exponential- und Logarithmusfunktionen

9.1 Exponentialfunktion

Erkennst du im Beispiel eine exponentielle Funktion $y = b \cdot a^x$? Wenn ja, gib die Funktionsgleichung an und mache eine Aussage über den Definitionsbereich.

- In einem Land leben im Jahr 1850 1 Million Menschen. Jedes Jahr erhöht sich die Einwohnerzahl durchschnittlich um 9%. Betrachte die Zuordnung
Anzahl Jahre (ab 1850) \mapsto Anzahl Einwohner
- Vreni beschliesst, am heutigen Tag 5000 Schritte zu gehen. Danach will sie ihre Schrittzahl täglich um 10 erhöhen. Betrachte die Zuordnung
Zeit in Tagen ab heute \mapsto Anzahl geplanter Schritte pro Tag
- Ein Auto wird zu einem Neupreis von Fr. 50 000.– gekauft. Sein Wert nimmt im ersten Jahr um 20%, danach pro Jahr um 10% ab. Betrachte die Zuordnung
Anzahl Jahre nach Kauf \mapsto aktueller Wert des Autos
- Auf einer einsamen Insel lebt eine bedrohte Tierart. Ihre Population geht von 3000 bei Beobachtungsbeginn zum Zeitpunkt t_0 jedes Jahr um einen Zehntel zurück. Betrachte die Zuordnung
Anzahl Jahre nach t_0 \mapsto Populationsgrösse
- Ila entwirft einen Kettenbrief, in welchem sie jeden der fünf Adressaten der ersten Runde dazu aufruft, den Brief an fünf neue Adressaten einer 2. Runde zu versenden, die dies ebenfalls machen sollen etc. Der Einfachheit halber gehen wir von der Annahme aus, dass alle Adressaten sich an die Anweisung halten. Betrachte die Zuordnung
 x -te Runde von Adressaten \mapsto Gesamtanzahl von versendeten Kettenbriefen
- Jorins Eltern haben Jorin zum ersten Geburtstag ein Konto mit einem festen Zinssatz von 3.5% eröffnet mit einer Einlage von Fr. 2500.–. Seither sind auf dem Konto weder Einzahlungen eingegangen noch wurde Geld entnommen. Betrachte die Zuordnung
Alter von Jorin in Jahren \mapsto Kontostand

Entscheide, ob es sich bei der Funktion um eine Exponentialfunktion handelt.

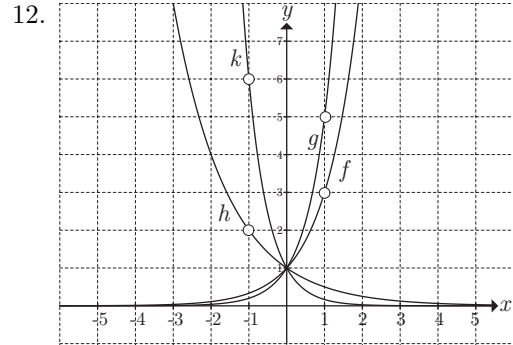
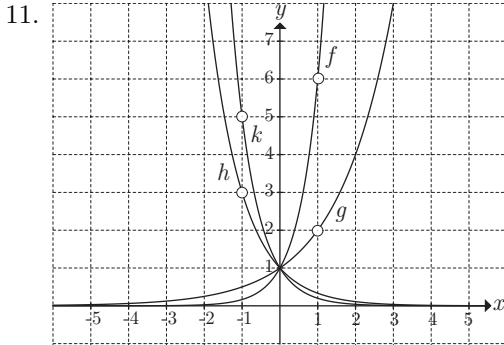
- | | | | |
|-------|--|--------------------------|--------------------------|
| 7. a) | f ordnet jedem x die Potenz mit Basis 2 und Exponent x zu. | ja | nein |
| | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) | $f : x \mapsto x^5$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) | $f : x \mapsto 2^x \cdot 3^x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) | f : Die Zahl x wird mit 4 potenziert. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | | |
| 8. a) | f ordnet dem Argument die dritte Potenz des Arguments zu. | ja | nein |
| | | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) | $f : x \mapsto 4^x : 3^x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) | $f : x \mapsto \frac{1}{5^x}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) | $f(x) = 1^x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Zeichne die Graphen der Funktionen im gleichen Koordinatensystem.

9. a) $f(x) = 2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 b) $g(x) = 3^x$ d) $k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

10. a) $f(x) = 4^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
 b) $g(x) = 5^x$ d) $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Gib zu jedem gezeichneten Graphen die passende Funktionsgleichung an.

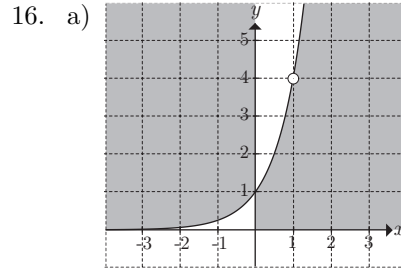
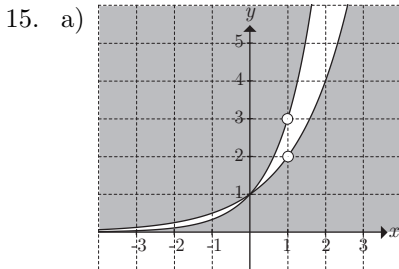


In welchem Gebiet liegen die Graphen von $f(x) = a^x$, wenn a die vorgegebene Bedingung erfüllen muss?

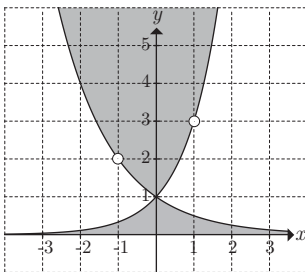
13. a) $1 < a < 3$
 b) $0 < a < 1$
 c) $\frac{1}{2} < a < 2$
 d) $0 < a < \frac{1}{2} \vee a > 2$

14. a) $0 < a < \frac{1}{2}$
 b) $1 < a < 5$
 c) $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{2}$
 d) $0 < a < \frac{1}{4} \vee a > \frac{1}{2}$

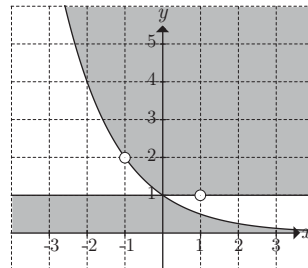
Für welche Basen a liegen die Graphen von $f(x) = a^x$ im gekennzeichneten Gebiet (ohne Rand)?



b) (ohne y -Achse ausser $(0, 1)$)



b) (ohne y -Achse ausser $(0, 1)$)



Für welche Basen a hat die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ die angegebene Eigenschaft? Wähle die grösstmögliche passende Zahlmenge für a .

① $a \in]0, 1[$

② $a > 1$

③ $a \in \mathbb{R}^+$

④ unmöglich

17. a) f ist streng monoton wachsend.
 b) Der Graph von f ist genau einmal auf der Höhe 2.
 c) Der Graph von f ist achsensymmetrisch.
 d) Die Asymptote des Graphen ist $y = 0$.
18. a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert $f(x) > 0$.
 b) f ist nicht streng monoton.
 c) f ist streng monoton fallend.
 d) Der Graph von f ist der an der y -Achse gespiegelte Graph von $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.
19. Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = 4^x$
 a) Das Argument wird um 1 verkleinert. Wie verändert sich der Funktionswert?
 b) Die unabhängige Variable wird verdoppelt. Wie verändert sich die abhängige Variable?
 c) Wie wurde das Argument verändert, wenn sich der Funktionswert vervierfacht hat?
 d) Wie wurde die unabhängige Variable verändert, wenn die abhängige Variable neu $\frac{1}{16}$ der ursprünglichen abhängigen Variablen entspricht?
20. Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 a) Das Argument wird halbiert. Wie verändert sich der Funktionswert?
 b) Die unabhängige Variable wird um drei vermindert. Wie verändert sich die abhängige Variable?
 c) Der neue Funktionswert ist ein Viertel des ursprünglichen Funktionswerts. Wie wurde das Argument verändert?
 d) Der neue Funktionswert ist die dritte Potenz des bisherigen Funktionswerts. Wie wurde die unabhängige Variable verändert?

Ordne der beschriebenen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ die passende Basis zu. Welche der Aussagen gelten für jede beliebige Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$?

① $a = 3$

② $a = \frac{3}{4}$

③ $a = \frac{3}{2}$

④ $a = \frac{2}{3}$

⑤ $a = 0.8$

⑥ $a = \frac{1}{5}$

21. a) Wenn man x um eins erhöht, nimmt der Funktionswert um 20% ab.
 b) Wenn man x halbiert, entsteht als Funktionswert die Wurzel des ursprünglichen Funktionswerts.
 c) Wenn man x um eins vermindert, vermindert sich der Funktionswert auf einen Drittel des vorherigen Funktionswerts.
 d) Wenn man x um vier vergrössert, verhält sich der neue Funktionswert zum alten Funktionswert wie 81 : 16.
22. a) Wenn man x um eins erhöht, nimmt der Funktionswert um einen Viertel des bisherigen Funktionswerts ab.
 b) Wenn man x verdoppelt, wird der Funktionswert quadriert.
 c) Wenn man x um eins vermindert, verfünffacht sich der Funktionswert.
 d) Wenn man x um drei vergrössert, reduziert sich der Funktionswert auf $\frac{8}{27}$ des ursprünglichen Funktionswerts.

Kreuze an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe.

- | | | wahr | falsch |
|-----|--|--------------------------|--------------------------|
| 23. | a) Der Graph von $f(x) = 2^x$ ist das Spiegelbild bezüglich der y -Achse vom Graphen von $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Der minimale Wertebereich (zum grösstmöglichen Definitionsbereich) einer beliebigen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist \mathbb{R} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Die Graphen der Funktionen $f(x) = 3^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ haben dieselbe Asymptote. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Der Graph jeder Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ hat den y -Achsenabschnitt 1. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 24. | a) Jede beliebige reelle Zahl kann Basis einer Exponentialfunktion sein. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Der Definitionsbereich jeder Exponentialfunktion ist \mathbb{R} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) $f(x) = 2^x$ und $g(x) = x^2$ sind beides Exponentialfunktionen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Jede Exponentialfunktion ist entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend auf dem ganzen Definitionsbereich. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 25. | a) Bei der Funktion f mit $f(x) = 0.6^x$ nimmt der Funktionswert um 40% ab, wenn man das Argument um eins erhöht. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Wenn man bei der Funktion $f(x) = 3^x$ das Argument um 2 erhöht, nimmt der Funktionswert um 9 zu. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Der Graph von $f(x) = 3^x$ verläuft für positives x steiler nach oben als der Graph der Funktion $g(x) = 2^x$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Für jedes negative x ist der Funktionswert von f mit $f(x) = 3^x$ kleiner als der Funktionswert von g mit $g(x) = 5^x$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 26. | a) Für jede Exponentialfunktion gilt: wenn man das Argument verdreifacht, wird der Funktionswert mit 3 potenziert. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Der Graph der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ verläuft für positives wachsendes x schneller gegen 0 als der Graph der Funktion $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Nimmt bei einer Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ der Funktionswert um 30% zu, wenn das Argument um 1 erhöht wird, so gilt $a = 0.3$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Für negative x ist der Funktionswert von f mit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ immer kleiner als der Funktionswert von g mit $g(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Entscheide für jeden gegebenen Punkt, ob er auf dem Graphen der Exponentialfunktion f liegt.

- | | |
|---|--|
| 27. a) $f: x \mapsto 3^x$, $P(4, 64), Q(5, 125)$ | 28. a) $f: x \mapsto 5^x$, $P(1, 0), Q(-2, \frac{1}{25})$ |
| b) $f: x \mapsto (\frac{1}{4})^x$, $P(3, \frac{1}{12}), Q(-2, \frac{1}{16})$ | b) $f: x \mapsto 4^x$, $P(\frac{3}{2}, 8), Q(-2, \frac{1}{16})$ |
| c) $f: x \mapsto 6^x$, $P(0, 1), Q(-3, -216)$ | c) $f: x \mapsto (\frac{1}{5})^x$, $P(3, 125), Q(1, \frac{1}{5})$ |
| d) $f: x \mapsto (\frac{1}{2})^x$, $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), Q(3, \sqrt{3})$ | d) $f: x \mapsto 2^x$, $P(8, 256), Q(-8, \frac{1}{256})$ |

Bestimme a so, dass der Graph von f mit $f(x) = a^x$ durch den Punkt P verläuft.

- | | | | |
|-------------------|--|------------------------------------|---------------------------|
| 29. a) $P(3, 64)$ | c) $P(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ | 30. a) $P(-\frac{1}{2}, \sqrt{6})$ | c) $P(4, \frac{16}{625})$ |
| b) $P(-2, 9)$ | d) $P(-3, \frac{27}{8})$ | b) $P(4, 256)$ | d) $P(-7, \frac{1}{128})$ |

Bestimme die zum Graphen gehörende Funktionsgleichung vom Typ $f(x) = a^x$.

- | | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 31. | 32. | 33. | 34. |
|-----|-----|-----|-----|

Bestimme die Parameter a und b , so dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ durch P und Q verläuft.

- | | |
|---|--|
| 35. a) $P(1, 1.5), Q(5, \frac{3}{32})$ | 36. a) $P(\frac{1}{2}, 4), Q(4, 512)$ |
| b) $P(1, -6), Q(3, -54)$ | b) $P(\frac{1}{4}, -3\sqrt{2}), Q(1, -12)$ |
| c) $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}), Q(-2, \frac{1}{108})$ | c) $P(-1, 30), Q(1, \frac{5}{6})$ |
| d) $P(0, 7), Q(-1, \frac{14}{3})$ | d) $P(4, 13.5), Q(0, \frac{1}{6})$ |

Bestimme die zum Graphen gehörende Funktionsgleichung vom Typ $f(x) = b \cdot a^x$.

- | | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 37. | 38. | 39. | 40. |
|-----|-----|-----|-----|

Von f sind an drei Stellen die Funktionswerte bekannt. Entscheide, ob f eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = b \cdot a^x$, eine lineare Funktion oder eine Potenzfunktion sein kann. Gib die passende Funktionsgleichung an.

41. a)

x	0	2	4
$f(x)$	2	10	18

b)

x	-2	1	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	4	32

42. a)

x	-1	0	1
$f(x)$	12	3	$\frac{3}{4}$

b)

x	-2	-1	0
$f(x)$	-8	-1	0

Finde, falls möglich, die passende Funktionsgleichung vom Typ $y = b \cdot a^x$ zur Wertetabelle.

43. a)

x	-2	-1	0	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

c)

x	-2	-1	0	2	4
y	$\frac{1}{2}$	1	2	8	16

b)

x	-2	-1	0	2	4
y	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-32	-512

d)

x	-2	-1	0	2	4
y	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{50}$

44. a)

x	-2	-1	0	2	4
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	9	81

c)

x	-2	-1	0	2	4
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	3	9

b)

x	-2	-1	0	2	4
y	-16	-8	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

d)

x	-2	-1	0	2	4
y	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{25}{4}$	$\frac{625}{16}$

Finde die passende Funktionsgleichung vom Typ $y = b \cdot a^x + c$ zur Wertetabelle.

! 45. a)

x	-2	-1	0	2	4
y	$\frac{35}{9}$	$\frac{11}{3}$	3	-5	-77

b)

x	-2	-1	0	2	4
y	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{17}{18}$	$-\frac{161}{162}$

! 46. a)

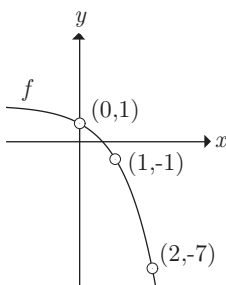
x	-2	-1	0	2	4
y	$-\frac{75}{4}$	$-\frac{35}{2}$	-15	0	60

b)

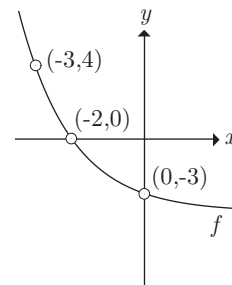
x	-2	-1	0	1	2
y	210	30	0	-5	$-\frac{35}{6}$

Bestimme die zum Graphen gehörende Funktionsgleichung vom Typ $f(x) = b \cdot a^x + c$.

! 47.



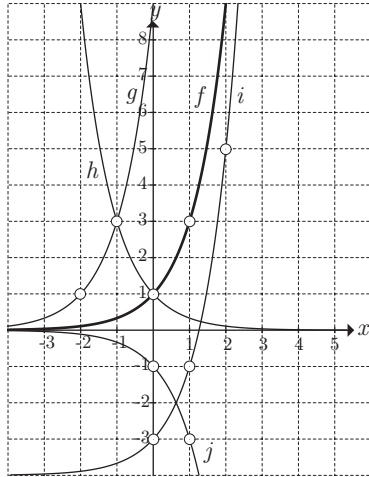
! 48.



Die Graphen von g bis j sind jeweils durch eine geometrische Abbildung aus dem Graphen von f entstanden. Beschreibe jede solche Abbildung in Worten und finde zu jedem der Graphen eine passende Funktionsgleichung.

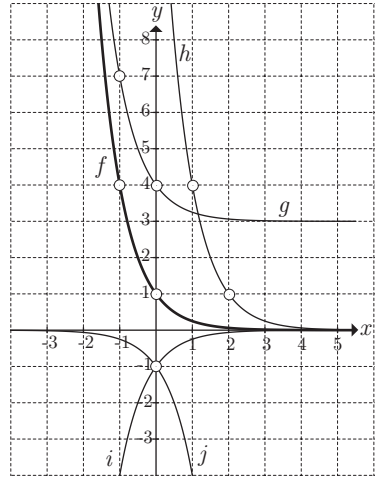
49.

$$f(x) = 3^x$$



50.

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$



Gib eine Abbildung an, welche die Funktion f mit $f(x) = 5^x$ auf g abbildet.

51. a) $g(x) = 5^{-x}$ c) $g(x) = 2 \cdot 5^x$ 52. a) $g(x) = 5^{2x}$ c) $g(x) = -3 \cdot 5^x$
 b) $g(x) = 5^{x+1} - 2$ d) $g(x) = 5^{3x}$ b) $g(x) = -5^{-x}$ d) $g(x) = 5^{x+1} + 3$

Gib eine (Folge von) Abbildung(en) an, welche die Funktion f mit $f(x) = 4^x$ auf g abbildet.

- ! 53. a) $g(x) = 2 \cdot 4^{2x} - 1$ b) $g(x) = (\sqrt{2})^x$! 54. a) $g(x) = 8^x$ b) $g(x) = -\frac{1}{2 \cdot 4^x}$

In der Skizze ist der Graph von f ersichtlich. Skizziere die Graphen der anderen Funktionen.

55. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

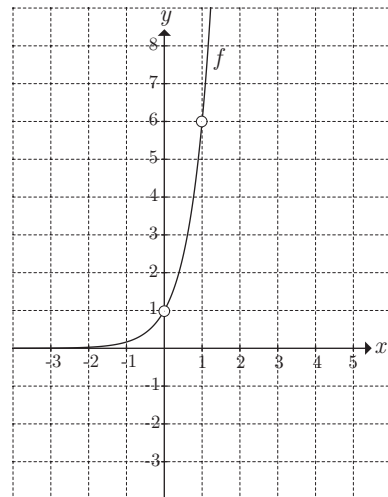
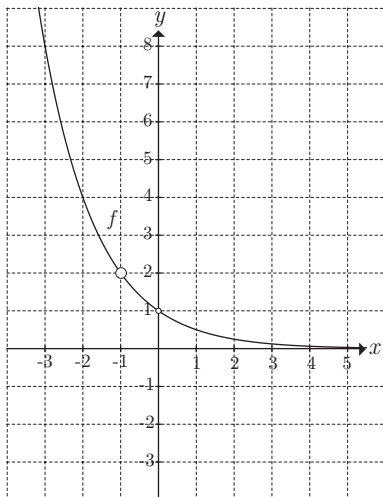
$$g(x) = 3 \cdot f(x), \quad i(x) = f(2x),$$

$$h(x) = f(x+2), \quad j(x) = f(x) + 3$$

56. $f(x) = 6^x$

$$g(x) = f(x-3), \quad i(x) = f(x+1) - 2,$$

$$h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right), \quad j(x) = -2f(x)$$



Der Graph der Funktion $f(x) = 2^x$ wird auf zwei Arten abgebildet. Begründe die Gleichheit der resultierenden Funktionen.

57. ①: Verschiebung um -2 in x -Richtung, 58. ①: Quadrieren jedes Funktionswerts,
 ②: Streckung in y -Richtung mit Faktor 4. ②: Streckung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$

Der Graph der Funktion $f(x) = 3^x$ wird abgebildet. Gib eine zweite Abbildung an, welche zur gleichen resultierenden Funktion führt.

59. a) Verschiebung um 1 in positive x -Richtung 60. a) Ersetzen der Basis durch ihren Kehrwert
 b) Wurzelziehen von jedem Funktionswert b) Streckung in y -Richtung mit Faktor 3

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4^x$ wird abgebildet. Gib jeweils die nach y aufgelöste Gleichung der entstehenden Funktion an.

61. a) Verschiebung um 3 in x -Richtung und um 5 in y -Richtung. 62. a) Spiegelung an der y -Achse.
 b) Spiegelung an der x -Achse. b) Verschiebung um -2 in x -Richtung und um 6 in y -Richtung.
 c) Streckung in y -Richtung mit Faktor 3. c) Streckung in x -Richtung mit Faktor 2.
 ! d) Spiegelung an der Geraden $x = -1$. ! d) Spiegelung an der Geraden $y = 1$.

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ wird abgebildet. Gib jeweils die nach y aufgelöste Gleichung der entstehenden Funktion an.

63. a) Spiegelung am Koordinatenursprung. 64. a) Verschiebung um -4 in y -Richtung und anschliessende Streckung in y -Richtung mit Faktor 5.
 b) Verschiebung um 2 in x -Richtung und anschliessende Streckung des Graphen in y -Richtung mit Faktor 3. ! b) Spiegelung am Punkt $(0, 1)$.
 c) Stauchung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ und anschliessende Translation um 2 in y -Richtung. c) Streckung in x -Richtung mit Faktor 2 und anschliessende Verschiebung um 4 in y -Richtung.
 d) Verschiebung um 1 in y -Richtung und anschliessende Stauchung in y -Richtung mit Faktor $\frac{1}{4}$. d) Streckung in x -Richtung mit Faktor 3 und anschliessende Spiegelung an der y -Achse.

Bestimme die Gleichung der Asymptoten und den y -Achsenabschnitt der Funktion.

65. a) $f(x) = 3^x + 4$ c) $f(x) = 2^{x+1}$ 66. a) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$ c) $f(x) = 3 \cdot 8^x$
 b) $f(x) = -4^x$ d) $f(x) = 5^{x+3} + 2$ b) $f(x) = -0.5^{x-2}$ d) $f(x) = 4^{-x}$

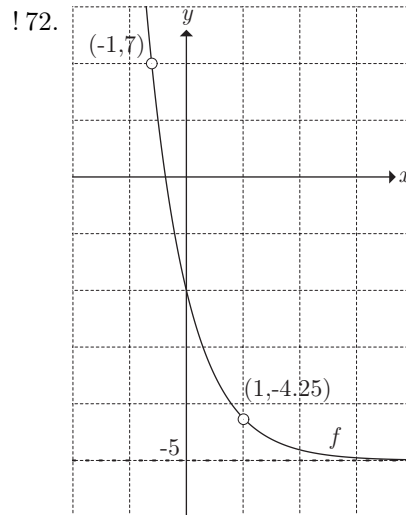
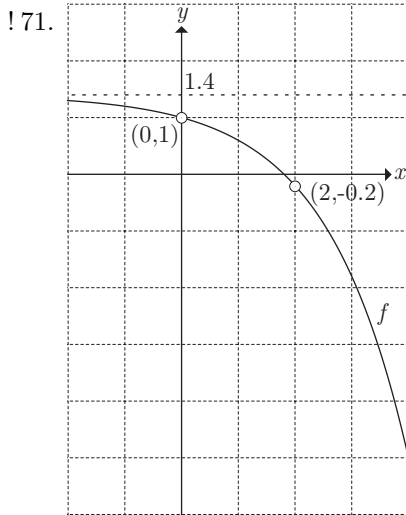
Entscheide aufgrund der gegebenen Funktionsgleichung, ob sich der Graph der Exponentialfunktion nach links oder nach rechts an die Asymptote anschmiegt und ob er sich der Asymptoten von oben oder von unten annähert.

67. a) $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ 68. a) $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 2$
 b) $f(x) = -2 \cdot 4^{-x} + 1$ b) $f(x) = -\frac{1}{9} \cdot 6^{-x} + 3$
 c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 3$ c) $f(x) = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1$
 d) $f(x) = -6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} + 5$ d) $f(x) = -0.1 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{-x} - 4$

Finde die Gleichung einer Exponentialfunktion $y = b \cdot a^x + c$

69. a) mit Asymptote $y = 4$, y -Achsenabschnitt 6 und Basis 2.
 b) mit Asymptote $y = 1$ und y -Achsenabschnitt 3, deren Graph durch den Punkt $(-1, 7)$ verläuft.
 c) mit Faktor $b = 3$, y -Achsenabschnitt 1 und Asymptote $y = -2$.
 d) deren Graph durch die Punkte $P(0, 2.5)$, $Q(1, \frac{9}{2})$ und $R(-1, 2.1)$ verläuft.
70. a) mit Asymptote $y = 4$ und y -Achsenabschnitt 1, deren Graph durch den Punkt $(1, -2)$ verläuft.
 b) welche den Faktor $b = \frac{1}{5}$ sowie die x -Achse als Asymptote besitzt und deren Graph durch $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{5})$ verläuft.
 c) deren Graph durch die Punkte $P(0, 4)$, $Q(1, -4)$ und $R(2, -44)$ verläuft.
 d) mit Asymptote $y = -3$, Basis $\frac{1}{2}$ und y -Achsenabschnitt 6.

Von einer Exponentialfunktion kennt man einen Ausschnitt des Graphen sowie die Asymptote. Bestimme die dazu passende Funktionsgleichung der Exponentialfunktion.



Entscheide begründet, ob die Funktion streng monoton wachsend (smw) oder streng monoton fallend (smf) ist.

- | | | smw | smf | | | smw | smf | | |
|-----|----|-----------------------------------|--------------------------|--------------------------|-----|-----|-------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 73. | a) | $f(x) = 2 \cdot 0.8^x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 74. | a) | $f(x) = -4^x + 20$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) | $f(x) = (2 \cdot 0.8)^x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | | b) | $f(x) = 2^{-\frac{1}{2}x}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) | $f(x) = 6 - 0.5^x$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | | c) | $f(x) = -(\frac{1}{4})^x + 1$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) | $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-x}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | | d) | $f(x) = 1.4^x - 5$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Kreuze an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe.

- | | | wahr | falsch |
|-----|---|--------------------------|--------------------------|
| 75. | a) Die Graphen von $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ und $g(x) = 2 \cdot 3^x$ haben denselben y -Achsenabschnitt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion verändert sich durch eine Verschiebung des Graphen in x -Richtung nicht. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Die Asymptote des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 7^x + 2$ ist $x = 2$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Es existiert eine Exponentialfunktion, deren Graph durch $P(2, 3)$ und $Q(12, 3)$ verläuft. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 76. | a) Die Asymptote jeder Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x + 5$ ist $y = 5$, unabhängig vom Parameter a . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Der y -Achsenabschnitt verändert sich nicht, wenn man in der Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion x durch $-x$ ersetzt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Eine Verschiebung des Graphen einer beliebigen Exponentialfunktion in x -Richtung verändert den Wertebereich der Funktion nicht. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Die Funktion $f(x) = -2 \cdot 6^x$ ist streng monoton fallend. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 77. | a) Der Graph der Funktion $f(x) = 2 \cdot 3^x$ lässt sich durch eine Stauchung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ in den Graphen der Funktion $g(x) = 3^x$ überführen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) $f(x) = 3^x$ und $g(x) = -3^{-x}$ sind identische Funktionen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Die Spiegelung einer Exponentialfunktion der Form $y = b \cdot a^x$ an der x -Achse verändert ihre Asymptote nicht. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Ersetzt man das Argument durch seinen Kehrwert, so wird der Graph einer Exponentialfunktion an der y -Achse gespiegelt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 78. | a) Spiegelt man den Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ am Koordinatenursprung, so bleibt die Asymptote dieselbe Gerade. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Ersetzt man das Argument durch seine Gegenzahl, so wird der Graph einer Exponentialfunktion an der x -Achse gespiegelt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Die Funktionen $f(x) = 4^{-x}$ und $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ sind identisch. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Die Asymptote der Funktion $f(x) = 6 \cdot 3^x - 2$ ist $y = -12$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

9.2 Exponentielles Wachstum und Zerfall

79. Die Anzahl Bakterien in einer Kultur wächst gleichmässig, d. h. in gleichen Zeitintervallen nimmt die Anzahl Bakterien um den gleichen Faktor zu. Zu Beginn des Experiments sind 2000 Bakterien vorhanden. Die Anzahl Bakterien verdoppelt sich innerhalb einer Stunde.
- Wie viele Bakterien sind vorhanden nach 1 h, 2 h, 3 h, 4 h, 5 h?
 - Um welchen Faktor vergrössert sich die Anzahl Bakterien von der ersten zur dritten, von der zweiten zur vierten Stunde?
 - Wie viele Bakterien sind nach n Stunden vorhanden?
 - Wie viele Bakterien sind nach einer halben Stunde, nach 1.5 h vorhanden?
 - Um wie viel Prozent nimmt die Bakterienanzahl während einer halben Stunde zu?
 - Welcher Wachstumsfaktor gehört zu einer Zeitspanne von 20 min?
80. Ein radioaktives Material zerfällt gleichmässig, d. h. in gleichen Zeitintervallen nimmt der Bestand um den gleichen Faktor ab. Zu Beginn sind 10^{16} Atomkerne vorhanden. Nach jeder Stunde halbiert sich die Anzahl vorhandener Atomkerne.
- Wie viele Atomkerne sind vorhanden nach 1 h, 2 h, 3 h, 4 h, 5 h?
 - Um welchen Faktor verkleinert sich die Anzahl Atomkerne von der ersten zur vierten, von der zweiten zur fünften Stunde?
 - Wie viele Atomkerne sind nach n Stunden vorhanden?
 - Wie viele Atomkerne sind nach einer halben Stunde, nach 1.5 h vorhanden?
 - Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl Atomkerne während einer halben Stunde ab?
 - Welcher Zerfallsfaktor gehört zu einer Zeitspanne von 20 min?
81. Koffein wird im Blut gleichmässig abgebaut. Bis der Körper die Hälfte des sich im Blut befindenden Koffeins abgebaut hat, benötigt er fünf Stunden. Anfänglich seien 50 mg Koffein im Blut vorhanden.
- Wie viele Milligramm Koffein sind nach 2 h, 3 h, 4 h, 5 h, 8 h im Blut vorhanden?
 - Um wie viel Prozent verkleinert sich die Anzahl Milligramm Koffein im Blut von der ersten zur dritten, von der zweiten zur fünften Stunde?
 - Wie viele Milligramm Koffein sind nach n Stunden im Blut vorhanden?
 - Wie viele Milligramm Koffein sind nach 100 min, nach 1000 min im Blut vorhanden?
 - Welcher Zerfallsfaktor gehört zu einer Zeitspanne von 100 min?
 - Schätze: Wann sind im Blut noch 20 mg Koffein vorhanden?
 - Wie lange dauert es in diesem Modell, bis das Koffein im Blut vollständig abgebaut sein wird?
82. Ein Schimmelpilz wächst unter idealen Bedingungen exponentiell. Innerhalb von zwei Wochen verdoppelt sich jeweils die vom Schimmelpilz befallene Fläche. Zu Beginn der Beobachtung ist eine Fläche von 48 cm^2 befallen.
- Wie gross ist die befallene Fläche nach 4 Wochen, 8 Wochen, 20 Wochen?
 - Schätze aus den berechneten Werten: nach wie vielen Wochen hat sich die Fläche verzehnfacht?
 - Um wie viel Prozent nimmt die befallene Fläche von der zweiten zur sechsten Woche zu?
 - Wie gross ist die befallene Fläche nach n Wochen?
 - Wie gross ist die befallene Fläche nach 1 Woche, 3 Wochen, 9 Wochen?
 - Welcher Wachstumsfaktor gehört zu einer Zeitspanne von 12 Wochen?
 - Wie gross war die befallene Fläche vier Wochen vor dem Start der Beobachtung?

83. In einem 36.45 ha grossen See befindet sich ein 500m^2 grosses Feld an Seerosen. Die Fläche dieses Feldes verdreifacht sich jeweils innerhalb von drei Jahren. Wie lange wird es dauern, bis der ganze See von Seerosen zugewachsen sein wird?
84. $\frac{1}{1024}$ eines Sees ist von Algen bedeckt. Die Algenfläche wächst jeweils innerhalb von 5 Tagen auf ihr Doppeltes an. Wann wird ein Viertel des Sees, wann der halbe, wann der gesamte See von Algen bedeckt sein?

Die Funktion f beschreibt ein exponentielles Wachstum abhängig von der Variablen t . Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

85. $f(t) = 3 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^t$

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$						

86. $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^t$

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$						

Die Funktion f beschreibt ein exponentielles Wachstum abhängig von der Variablen t .

87. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	0	1	2	3	4	6
$f(t)$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			

- b) Bestimme die Funktionsgleichung von f ausgehend vom Zeitpunkt 0.
 c) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 1$?
 d) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 2$?
 e) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{2}$?

88. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	0	1	2	3	4	6
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$				

- b) Bestimme die Funktionsgleichung von f ausgehend vom Zeitpunkt 0.
 c) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 1$?
 d) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 2$?
 e) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{2}$?

89. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	-3	1	4	6	9	11
$f(t)$			1.5		48	

- b) Bestimme die Funktionsgleichung von f ausgehend vom Zeitpunkt 0.
 c) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 1$?
 d) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 9$?
 e) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{2}$?

90. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	-1	0	2	3	5	10
$f(t)$				$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	

- b) Bestimme die Funktionsgleichung von f ausgehend vom Zeitpunkt 0.
 c) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 1$?
 d) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 4$?
 e) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{2}$?

91. Ein Pulver ist wasserlöslich. Es werden 50 mg des Pulvers in Wasser gegeben. Pro Sekunde nimmt die Menge ungelösten Pulvers um 10% ab. Nach wie vielen Sekunden ist erstmals weniger als 10 mg ungelöstes Pulver vorhanden?
92. Der Abbau eines Schadstoffes im Wasser erfolge exponentiell. Zu Beginn der Messung sind in einem Liter Wasser 0.5 mg des Schadstoffes vorhanden, vier Monate später noch 0.4 mg. Nach wie vielen Monaten liegt die Schadstoffmenge erstmals unter 0.2 mg pro Liter Wasser?

Die Funktion f beschreibt einen exponentiellen Zerfall abhängig von der Variablen t . Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle. Runde jeweils auf zwei Nachkommastellen.

93. $f(t) = 12 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^t$

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$						

94. $f(t) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$						

Die Funktion f beschreibt einen exponentiellen Zerfall abhängig von der Variablen t .

95. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	0	1	2	2.5	3	8
$f(t)$		20	10			

96. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	0	2	2.5	3	6	8
$f(t)$				9		$\frac{32}{27}$

- b) Bestimme die Funktionsgleichung von f ausgehend vom Zeitpunkt 0.
- c) Welcher Zerfallsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 1$?
- d) Welcher Zerfallsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 5$?
- e) Welcher Zerfallsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{2}$?

97. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	-3	1	4	6	9	11
$f(t)$			1.5		48	

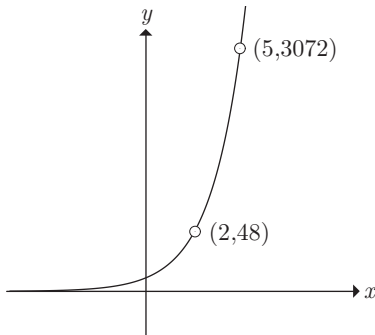
98. a) Vervollständige den Ausschnitt der Wertetabelle.

t	-3	1	4	6	9	11
$f(t)$			1.5		48	

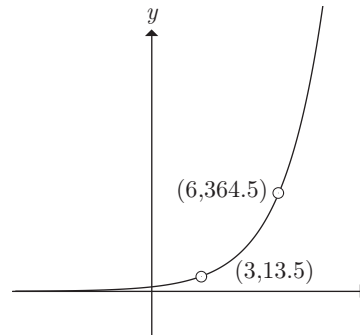
- b) Bestimme die Funktionsgleichung von f ausgehend vom Zeitpunkt 0.
- c) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 1$?
- d) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = 9$?
- e) Welcher Wachstumsfaktor gehört zur Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{2}$?

Von einer exponentiellen Wachstumsfunktion kennt man einen Ausschnitt des Graphen. Bestimme daraus den Wachstumsfaktor zur Zeitspanne $\Delta t = 3$. Berechne zusätzlich den Wachstumsfaktor zur Zeitspanne $\Delta t = 1$.

99.

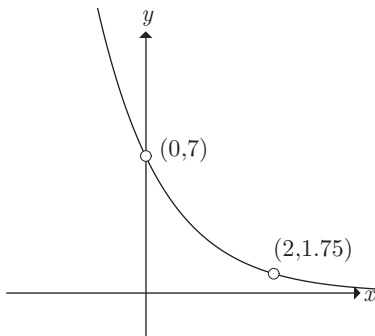


100.

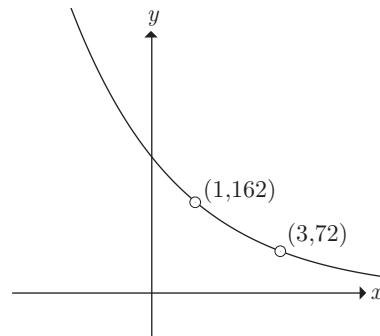


Von einer exponentiellen Zerfallsfunktion kennt man einen Ausschnitt des Graphen. Bestimme daraus den Zerfallsfaktor zur Zeitspanne $\Delta t = 2$. Berechne zusätzlich den Zerfallsfaktor zur Zeitspanne $\Delta t = 1$.

101.



102.



Die Anzahl Autos in einer Stadt verändere sich exponentiell nach der Formel $f(t) = 15\,600 \cdot 1.05^t$, wobei t die Anzahl Jahre nach Beginn der Datenerfassung bedeutet. Entscheide mit Begründung, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

- | | | wahr | falsch |
|------|---|--------------------------|--------------------------|
| 103. | a) Die Anzahl Autos wächst im Lauf der Zeit. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Pro Jahr nimmt die Anzahl Autos um 0.5 % zu. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Drei Jahre nach Beginn der Datenerfassung sind 15 % mehr Autos vorhanden als zu Erfassungsbeginn. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Sechs Jahre nach Erfassungsbeginn ist die Anzahl Autos 1.05^3 mal so gross wie drei Jahre nach Erfassungsbeginn. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | | wahr | falsch |
| 104. | a) Zu Beginn der Datenerfassung gibt es in der Stadt 15 600 Autos. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | b) Zwanzig Jahre nach Erfassungsbeginn hat sich die Anzahl Autos in der Stadt genau verdoppelt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | c) Die Anzahl Autos in der Stadt nimmt jedes Jahr um gleich viele Autos zu. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| | d) Die Anzahl Autos in der Stadt nimmt jedes Jahr um gleich viel Prozent zu. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Die Funktion $f(t) = b \cdot a^t$ beschreibt ein exponentielles Wachstum bzw. einen exponentiellen Zerfall. Berechne a , wenn der Funktionswert im Zeitintervall $\Delta t = 1$

105. a) zunimmt um 20%.
b) abnimmt um 88%.
106. a) zunimmt um 125%.
b) abnimmt um 13%.

Die Funktion $f(t) = b \cdot a^t$ beschreibt ein exponentielles Wachstum bzw. einen exponentiellen Zerfall. Bestimme die prozentuale Zunahme bzw. Abnahme im Zeitintervall $\Delta t = 1$.

107. a) $b = 1.4$
b) $b = \frac{1}{4}$
108. a) $b = 2.5$
b) $b = 0.3$
109. Zur Zeitspanne $\Delta t = 1$ gehört der Wachstumsfaktor 8. Bestimme den Wachstumsfaktor zur angegebenen Zeitspanne Δt .
a) $\Delta t = 3$ c) $\Delta t = \frac{1}{12}$
b) $\Delta t = \frac{1}{2}$ d) $\Delta t = 1.5$
110. Zur Zeitspanne $\Delta t = 1$ gehört der Zerfallsfaktor $\frac{3}{4}$. Bestimme den Zerfallsfaktor zur angegebenen Zeitspanne Δt .
a) $\Delta t = 2$ c) $\Delta t = \frac{3}{2}$
b) $\Delta t = \frac{1}{2}$ d) $\Delta t = 3$
111. Zur Zeitspanne 5 gehört
a) der Zerfallsfaktor $\frac{1}{4}$.
Bestimme die Halbwertszeit.
b) der Wachstumsfaktor $128\sqrt{2}$.
Bestimme die Verdoppelungszeit.
112. Zur Zeitspanne 4 gehört
a) der Zerfallsfaktor 0.0625.
Bestimme die Halbwertszeit.
b) der Wachstumsfaktor 256.
Bestimme die Verdoppelungszeit.
113. Der Bestand einer bedrohten Pflanzenart geht seit 2022 jeweils innerhalb eines Jahres um einen Viertel zurück.
a) Bestimme zum Zeitintervall $\Delta t = 1$ den Zerfallsfaktor.
b) Um viel Prozent verkleinert sich der Bestand innerhalb von drei Jahren?
c) Wann wird der Bestand noch ein Anteil von $\frac{243}{1024}$ vom Bestand von 2022 sein?
114. Der Bestand einer bedrohten Tierart geht seit 2025 jeweils innerhalb eines Jahres um einen Fünftel zurück.
a) Bestimme zum Zeitintervall $\Delta t = 1$ den Zerfallsfaktor.
b) Um viel Prozent verkleinert sich der Bestand innerhalb von drei Jahren?
c) In welchem Jahr wird der Bestand noch 40.96 % vom Bestand von 2025 sein?
115. Eine Tierpopulation vermehrt sich exponentiell. 10 Jahre nach Beobachtungsbeginn wurden 11 750 Tiere gezählt, 10 Jahre später 30 476.
a) Wie viele Tiere dieser Population waren zu Beobachtungsbeginn vorhanden?
b) Wie gross ist die jährliche prozentuale Zunahme der Population?
116. Einzeller vermehren sich durch Zellteilung exponentiell. 3 h nach Beobachtungsbeginn werden 4960 Einzeller gezählt, nach 5 h 19 840.
a) Wie viele Einzeller waren zu Beobachtungsbeginn vorhanden?
b) Wie gross ist die prozentuale Zunahme der Population in 30 min?
117. Ein Wald wächst in einer optimalen Umgebung und ohne Holzschlag exponentiell. 2024 beträgt der Bestand $56\,788\text{ m}^3$, 15 Jahre früher betrug er $36\,450\text{ m}^3$.
a) Berechne den Waldbestand 2014.
b) Berechne den Waldbestand 2034.
c) Um wie viel Prozent nimmt der Waldbestand jährlich zu?
118. Eine Bakterienkultur wächst unter optimalen Bedingungen exponentiell. Um 10 Uhr sind es 6520 Bakterien und um 13 Uhr 24 753.
a) Wie viele Bakterien waren es um 8 Uhr?
b) Wie viele werden es um 17 Uhr sein?
c) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl Bakterien stündlich zu?

119. Der Wert einer Computeranlage nimmt exponentiell ab. Drei Jahre nach Anschaffung beträgt ihr Wert Fr. 2017795.–, weitere drei Jahre später Fr. 957549.–.
- Berechne den Neuwert der Anlage.
 - Berechne den Wert der Computeranlage 10 Jahre nach Anschaffung.
 - Um wie viel Prozent nimmt der Wert der Computeranlage jährlich ab?
120. Der Wert eines Autos nimmt exponentiell ab. Zwei Jahre nach Anschaffung beträgt sein Wert Fr. 29248.–, weitere drei Jahre später Fr. 10917.–
- Berechne den Neuwert der Autos.
 - Berechne den Wert des Autos 10 Jahre nach Anschaffung.
 - Um wie viel Prozent nimmt der Wert des Autos jährlich ab?
121. Im Jahr 2020 betrug die Einwohnerzahl eines Dorfes 4820. Sie verdoppelt sich immer innert 16 Jahren.
- Gib die Einwohnerzahl $f(t)$ des Dorfes abhängig von der Anzahl Jahre nach 2020 an.
 - Bestimme die Einwohnerzahl des Dorfes im Jahr 2030.
 - Bestimme die Einwohnerzahl des Dorfes im Jahr 2060.
 - Wie viele Einwohner hatte das Dorf im Jahr 2000?
122. Im Jahr 2022 betrug die Einwohnerzahl 26350. Sie verdreifacht sich immer innert 30 Jahren.
- Gib die Einwohnerzahl $f(t)$ der Stadt abhängig von der Anzahl Jahre nach 2022 an.
 - Bestimme die Einwohnerzahl der Stadt im Jahr 2030.
 - Bestimme die Einwohnerzahl der Stadt im Jahr 2060.
 - Wie viele Einwohner hatte die Stadt im Jahr 2000?
123. Bierschaum zerfällt exponentiell. Die Höhe der Schaumkrone ist in einem Experiment nach dem Einschenken 4.8 cm und nimmt pro Minute um 25 % ihrer Höhe ab.
- Beschreibe die Höhe $f(t)$ der Schaumkrone abhängig von der seit dem Einschenken vergangenen Zeit t in Minuten mit einer Funktionsgleichung.
 - Wie hoch ist die Schaumkrone 4 min, 6 min respektive 10 min nach dem Einschenken?
 - Wie viel Prozent der ursprünglichen Höhe der Schaumkrone ist nach 6 min noch vorhanden?
124. Nach Einnahme seien 500 mg eines Medikaments im Blut vorhanden. In jeder folgenden Stunde verringert sich die Konzentration des Medikaments im Blut um 14 %.
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, welche die Menge $f(t)$ des Medikaments im Blut in Anzahl Stunden t nach Einnahme des Medikaments beschreibt.
 - Wie gross ist die im Blut vorhandene Menge des Medikaments 3 Stunden respektive 7 Stunden nach Einnahme?
 - Wie viel Prozent des Medikaments ist 5 Stunden nach Einnahme noch im Blut vorhanden?
125. Die Lichtstärke an der Wasseroberfläche beträgt an einer bestimmten Stelle 20 Lux und nimmt beim Tauchen um 10 % pro Meter Tauchtiefe ab.
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, welche die Lichtstärke $f(t)$ in t Metern Tiefe beschreibt.
 - Wie hell ist es in 4 m Tiefe?
 - Wie hell ist es in 24 m Tiefe?
 - Wie viel Prozent von der Lichtstärke an der Wasseroberfläche ist in 10 m Tiefe noch vorhanden?
126. Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt 1013.25 hPa. Pro Kilometer Höhe nimmt er um 12 % ab.
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, welche den Luftdruck $f(h)$ in h Kilometern über Meer beschreibt.
 - Berechne den Luftdruck in Winterthur.
 - Berechne den Luftdruck in 4 km Höhe.
 - Wie viel Prozent des Luftdrucks auf Meereshöhe beträgt der Luftdruck auf dem Mount Everest?

127. Ein Kunde legt Fr. 10 000.– auf einem Sparkonto an, welches 1.5 % Jahreszins bietet. Der Zins wird jeweils nach einem Jahr zum Kapital geschlagen.
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, welche das Kapital nach n Jahren beschreibt.
 - Auf welchen Wert ist das Kapital nach 10 Jahren, 20 Jahren, 50 Jahren angewachsen?
128. Ein Kunde legt Fr. 15 000.– auf einem Sparkonto an, welches 1.1 % Jahreszins bietet. Der Zins wird jeweils nach einem Jahr zum Kapital geschlagen.
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, welche das Kapital nach n Jahren beschreibt.
 - Auf welchen Wert ist das Kapital nach 10 Jahren, 20 Jahren, 50 Jahren angewachsen?
129. Ein Kapital von Fr. 20 000.– wächst auf einem Sparkonto innerhalb von 10 Jahren auf Fr. 25 601.69 an. Welcher Zinssatz wurde auf diesem Konto gewährt, wenn man davon ausgeht, dass er über die ganzen zehn Jahre konstant blieb?
130. Ein Kapital von Fr. 40 000.– wächst auf einem Sparkonto innerhalb von 20 Jahren auf Fr. 69 490.– an. Welcher Zinssatz wurde auf diesem Konto gewährt, wenn man davon ausgeht, dass er über die ganzen zwanzig Jahre konstant blieb?

9.3 Die Zahl e

Ein Bankjahr hat 360 Tage. Angenommen, es gäbe eine Bank, die ein Startkapital verzinst und den Zins am Ende einer Zinsperiode zum Kapital schlägt. Wie gross wäre das Kapital nach einem Jahr, wenn das

131. Startkapital Fr. 1.– und der Jahreszins 100 % beträgt und
- jährlich verzinst wird?
 - halbjährlich, also zweimal zu 50 %, verzinst wird?
 - vierteljährlich verzinst wird?
 - monatlich verzinst wird?
 - täglich verzinst wird?
 - stündlich verzinst wird?
 - minütlich verzinst wird?
 - n mal jährlich verzinst wird?
132. Startkapital Fr. 100.– und der Jahreszins 100 % beträgt und
- jährlich verzinst wird?
 - halbjährlich, also zweimal zu 50 %, verzinst wird?
 - vierteljährlich verzinst wird?
 - monatlich verzinst wird?
 - täglich verzinst wird?
 - stündlich verzinst wird?
 - minütlich verzinst wird?
 - n mal jährlich verzinst wird?

Berechne den Wert und seine prozentuale Abweichung von der Eulerschen Zahl e .

133. a) $(1 + \frac{1}{2})^2$ c) $(1 + \frac{1}{100})^{100}$ 134. a) $(1 + \frac{1}{10^4})^{10^4}$ c) $(1 + \frac{1}{10^6})^{10^6}$
 b) $(1 + \frac{1}{10})^{10}$ d) $(1 + \frac{1}{1000})^{1000}$ b) $(1 + \frac{1}{10^5})^{10^5}$ d) $(1 + \frac{1}{10^7})^{10^7}$

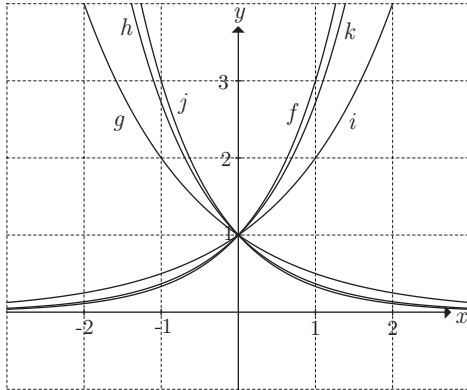
Berechne den Wert und seine prozentuale Abweichung von der Eulerschen Zahl e .

135. a) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ 136. a) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
 b) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8}$ b) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15}$

Gegeben sind Funktionsgleichungen und Graphen. Ordne jeweils einer Gleichung y_1 bis y_6 einen der Graphen f bis k zu.

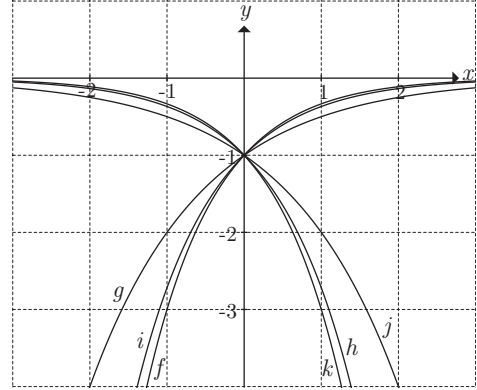
137.

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^x & y_4 &= \left(\frac{1}{e}\right)^x \\ y_2 &= 2^x & y_5 &= 3^x \\ y_3 &= e^x & y_6 &= \left(\frac{1}{3}\right)^x \end{aligned}$$



138.

$$\begin{aligned} y_1 &= -\left(\frac{1}{2}\right)^x & y_4 &= -\left(\frac{1}{e}\right)^x \\ y_2 &= -2^x & y_5 &= -3^x \\ y_3 &= -e^x & y_6 &= -\left(\frac{1}{3}\right)^x \end{aligned}$$



Skizziere die Graphen der Funktionen ausgehend vom Graphen von $f(x) = e^x$.

[139.] $g(x) = e^{x+2}$, $i(x) = 2e^x$,
 $h(x) = -e^{0.5x}$, $j(x) = e^x - 1$

[140.] $g(x) = e^{2x}$, $i(x) = -\frac{1}{2}e^x$,
 $h(x) = -e^{1-x}$, $j(x) = e^{x-3} + 1$

Mithilfe der Exponentialfunktionen mit Basis e lassen sich die hyperbolischen Funktionen definieren, die viele Analogien zu den trigonometrischen Funktionen haben. Cosinus hyperbolicus, Sinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus sind definiert als

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

- ! [141.] a) Skizziere die Graphen von $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ und $h(x) = \cosh(x)$.
 b) Zeige, dass \cosh eine gerade Funktion ist.
 c) Untersuche das Monotonieverhalten von \cosh .
- ! [142.] a) Skizziere die Graphen von $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ und $h(x) = \sinh(x)$.
 b) Zeige, dass \sinh eine ungerade Funktion ist.
 c) Untersuche das Monotonieverhalten von \sinh .
- ! 143. a) Zeige, dass $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
 b) Bestimme alle Nullstellen von \tanh .
 c) Entscheide, ob es sich bei \tanh um eine gerade oder eine ungerade Funktion handelt.
- ! 144. a) Zeige, dass $\coth(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}$.
 b) Zeige, dass \coth keine Nullstellen hat.
 c) Entscheide, ob es sich bei \coth um eine gerade oder eine ungerade Funktion handelt.
- ! 145. a) Zeige, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 b) Zeige, dass $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$
- ! 146. a) Zeige, dass $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$
 b) Zeige, dass $\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$

Lösungen

9 Exponential- und Logarithmusfunktionen

9.1 Exponentialfunktion

1. ja, $y = 10^6 \cdot 1.09^x$, $\mathbb{D} = \mathbb{N}_0$

3. nein

5. ja, $y = 5^x$, $\mathbb{D} = \mathbb{N}$, $\mathbb{W} = \{5^n | n \in \mathbb{N}\}$

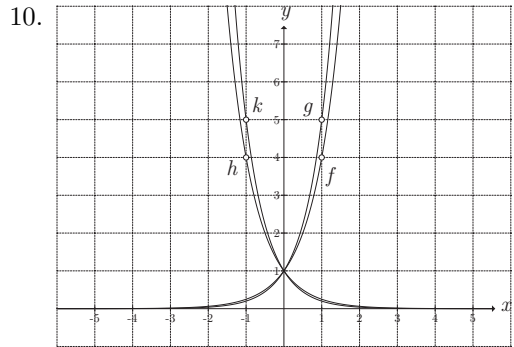
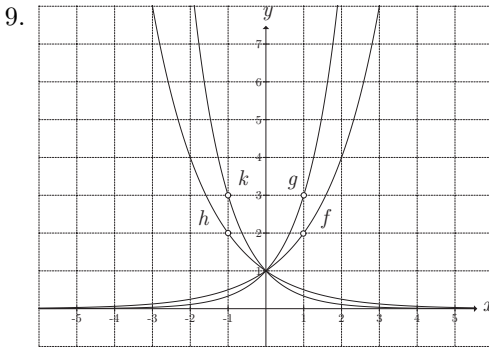
- | | | | | | |
|-------|-------------------------------------|-------------------------------------|----|-------------------------------------|-------------------------------------|
| | ja | nein | | ja | nein |
| 7. a) | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | c) | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | d) | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

2. nein, linear

4. ja, $y = 3000 \cdot 0.9^t$, $\mathbb{D} = \mathbb{N}_0$

6. ja, $y = 2500 \cdot 1.035^{t-1}$, $\mathbb{D} = \mathbb{N}$

- | | | | | | |
|-------|-------------------------------------|-------------------------------------|----|-------------------------------------|-------------------------------------|
| | ja | nein | | ja | nein |
| 8. a) | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | c) | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | d) | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

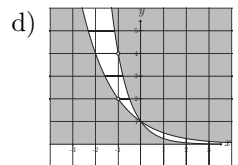
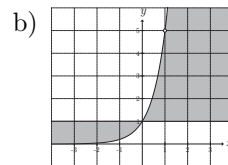
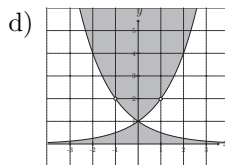
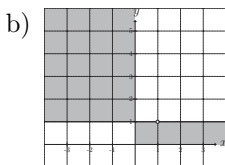
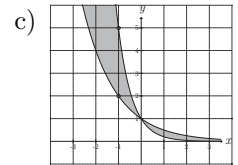
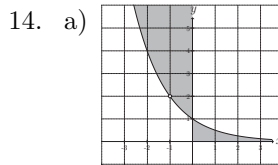
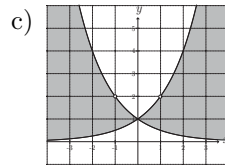
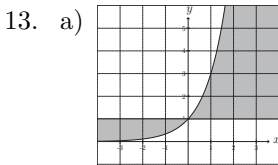


11. $f: x \rightarrow 6^x$
 $g: x \rightarrow 2^x$
 $h: x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 $k: x \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x$

12. $f: x \rightarrow 3^x$
 $g: x \rightarrow 5^x$
 $h: x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 $k: x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Bemerkung zu den Aufgaben 13 und 14:

Die Lösung ist jeweils das grau hervorgehobene Gebiet ohne den Rand, bei d) zusätzlich ebenfalls ohne die y -Achse.



15. a) $0 < a < 2 \vee a > 3$
 b) $0 < a < \frac{1}{2} \vee a > 3$

16. a) $0 < a < 4$
 b) $0 < a < \frac{1}{2} \vee a > 1$

17. a) ② c) ④
 b) ③ d) ③

18. a) ③ c) ①
 b) ④ d) ③

19. a) Der neue Funktionswert ist $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen Funktionswerts.
 b) Die abhängige Variable ist das Quadrat der ursprünglichen abhängigen Variablen.
 c) Das Argument wurde um eins erhöht.
 d) Die unabhängige Variable wurde um zwei verkleinert.
20. a) Der neue Funktionswert ist die Wurzel des ursprünglichen Funktionswerts.
 b) Die abhängige Variable wird verachtfacht.
 c) Das Argument wurde um 2 erhöht.
 d) Die unabhängige Variable wurde verdreifacht.
21. a) ⑤
 b) $f(x) = a^x$ für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
 c) ①
 d) ③
22. a) ②
 b) $f(x) = a^x$ für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
 c) ⑥
 d) ④
23. a)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

 d)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------
24. a)

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 b)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------

 d)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------
25. a)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

 d)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------
26. a)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 b)

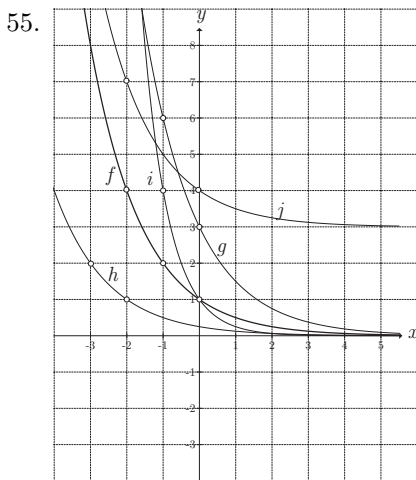
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

 d)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------
27. a) P : ja, Q : nein
 b) P : nein, Q : nein
 c) P : ja, Q : nein
 d) P : nein, Q : nein
28. a) P : nein, Q : ja
 b) P : ja, Q : ja
 c) P : nein, Q : ja
 d) P : ja, Q : ja
29. a) 4
 b) $\frac{1}{3}$
30. a) $\frac{1}{6}$
 b) 4
31. $f(x) = 4^x$
32. $f(x) = 0.5^x$
33. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
34. $f(x) = 10^x$
35. a) $a = \frac{1}{2}, b = 3$
 b) $a = 3, b = -2$
36. a) $a = 4, b = 2$
 b) $a = 4, b = -3$
37. $f(x) = -3^x$
38. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$
39. $f(x) = -2 \cdot 5^x$
40. $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
41. a) linear, $f(x) = 4x + 2$
42. a) Exponentialfunktion, $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$
43. a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 b) $y = -2 \cdot 4^x$
44. a) $y = 3^x$
 b) nicht möglich
45. a) $y = -3^x + 4$
 b) $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$
46. a) $y = 5 \cdot 2^x - 20$
 b) $y = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6$
47. $f(x) = -3^x + 2$
48. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

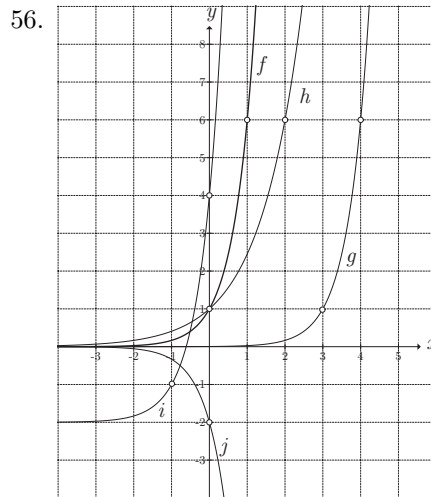
49. g : Verschiebung um 2 nach links;
 $y = 3^{x+2}$
 h : Spiegelung an der y -Achse;
 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 i : Verschiebung um -4 in y -Richtung;
 $y = 3^x - 4$
 j : Spiegelung an der x -Achse;
 $y = -3^x$

51. a) Spiegelung an der y -Achse
 b) Verschiebung um -1 in x -Richtung und um -2 in y -Richtung
 c) Streckung in y -Richtung mit Faktor 2
 d) Stauchung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$
53. a) z. B. Stauchung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$, Streckung in y -Richtung mit Faktor 2, anschliessend Verschiebung um 1 nach unten
 b) z. B. Streckung in x -Richtung mit Faktor 4



50. g : Verschiebung um 3 nach oben;
 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 3$
 h : Verschiebung um 2 in x -Richtung;
 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$
 i : Spiegelung an der x -Achse;
 $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$
 j : Spiegelung am Koordinatenursprung;
 $y = -4^x$

52. a) Stauchung in x -Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$
 b) Spiegelung am Koordinatenursprung
 c) Streckung mit Faktor -3 in y -Richtung
 d) Verschiebung um -1 in x -Richtung und um 3 in y -Richtung
54. a) z. B. Streckung in x -Richtung mit Faktor $\frac{2}{3}$
 b) z. B. Spiegelung am Koordinatenursprung und Stauchung in y -Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$



57. $g(x) = 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$

59. a) Stauchung in y -Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$
 b) Streckung in x -Richtung mit Faktor 2

61. a) $y = 4^{x-3} + 5$ c) $y = 3 \cdot 4^x$
 b) $y = -4^x$ d) $y = 4^{-(x+2)}$

63. a) $y = -2^x$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} + 2$
 b) $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ d) $y = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \right)$

58. $g(x) = 2^{2x} = 2^{x \cdot 2} = (2^x)^2$

60. a) Spiegelung an der y -Achse
 b) Verschiebung um 1 in negative x -Richtung

62. a) $y = 4^{-x}$ c) $y = 4^{\frac{1}{2}x} = 2^x$
 b) $y = 4^{x+2} + 6$ d) $y = -4^x + 2$

64. a) $y = 5 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 \right)$ c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} + 4$
 b) $y = -2^x + 2$ d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}x}$

65. a) Asymptote: $y = 4$
 y -Achsenabschnitt: 5
 b) Asymptote: $y = 0$
 y -Achsenabschnitt: -1
 c) Asymptote: $y = 0$
 y -Achsenabschnitt: 2
 d) Asymptote: $y = 2$
 y -Achsenabschnitt: 127
66. a) Asymptote: $y = 0$
 y -Achsenabschnitt: 3
 b) Asymptote: $y = 0$
 y -Achsenabschnitt: -4
 c) Asymptote: $y = 0$
 y -Achsenabschnitt: 3
 d) Asymptote: $y = 0$
 y -Achsenabschnitt: 1
67. a) nach links, von oben
 b) nach rechts, von unten
 c) nach rechts, von oben
 d) nach links, von unten
68. a) nach rechts, von oben
 b) nach rechts, von unten
 c) nach rechts, von oben
 d) nach rechts, von unten
69. a) $y = 2 \cdot 2^x + 4$
 b) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
 c) $y = 3 \cdot 4^x - 2$
 d) $y = \frac{1}{2} \cdot 5^x + 2$
70. a) $y = -3 \cdot 2^x + 4$
 b) $y = \frac{1}{5} \cdot 6^x$
 c) $y = -2 \cdot 5^x + 6$
 d) $y = 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$
71. $y = -\frac{2}{5} \cdot 2^x + \frac{7}{5}$
72. $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$
73. a)

smw	smf
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

smw	smf
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------

 d)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------
74. a)

smw	smf
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

smw	smf
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

 d)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------
75. a)

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 b)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------

 d)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------
76. a)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------

 d)

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-------------------------------------	--------------------------
77. a)

wahr	falsch
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

 d)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------
78. a)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 c)

wahr	falsch
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 b)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

 d)

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
--------------------------	-------------------------------------

9.2 Exponentielles Wachstum und Zerfall

79. a) nach 1 h: 4000,
 nach 2 h: 8000,
 nach 3 h: 16 000,
 nach 4 h: 32 000,
 nach 5 h: 64 000
 b) 4, 4
 c) $2000 \cdot 2^n$
 d) 2828, 5657
 e) 41.42 %
 f) 1.26
80. a) nach 1 h: $5 \cdot 10^{15}$,
 nach 2 h: $2.5 \cdot 10^{15}$,
 nach 3 h: $1.25 \cdot 10^{15}$,
 nach 4 h: $6.25 \cdot 10^{14}$,
 nach 5 h: $3.125 \cdot 10^{14}$
 b) $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$
 c) $10^{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 d) $7.07 \cdot 10^{15}, 3.54 \cdot 10^{15}$
 e) 29.29 %
 f) 0.79

81. a) nach 2 h: 37.89 mg,
nach 3 h: 32.99 mg,
nach 4 h: 28.72 mg,
nach 5 h: 25 mg,
nach 8 h: 16.49 mg
b) 24.21 %, 34.02 %
c) $50 \cdot 2^{-0.2n}$
d) 39.68 mg, 4.96 mg
e) 0.79
f) nach 6.6 h, d.h. im Verlauf der 7. Stunde
g) theoretisch unendlich lang

83. 18 Jahre

85.

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$	$\frac{625}{432}$	$\frac{125}{72}$	3	$\frac{18}{5}$	$\frac{648}{125}$	$\frac{23\,328}{3125}$

87. a)

t	0	1	2	3	4	6
$f(t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{243}{2}$

b) $f(t) = \frac{1}{6} \cdot 3^t$

c) 3

d) 9

e) $\sqrt{3}$

89. a)

t	-3	1	4	6	9	11
$f(t)$	$\frac{3}{256}$	$\frac{3}{16}$	1.5	6	48	192

b) $f(t) = \frac{3}{32} \cdot 2^t$

c) 2

d) 512

e) $\sqrt{2}$

91. 16 s

93.

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$	24.88	20.74	12	10	6.94	4.82

95. a)

t	0	1	2	2.5	3	8
$f(t)$	40	20	10	$5\sqrt{2}$	5	$\frac{5}{32}$

b) $f(t) = 40 \cdot 0.5^t$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{32}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

82. a) nach 4 Wochen: 192 cm²,
nach 8 Wochen: 768 cm²,
nach 20 Wochen: 49 152 cm²

b) 7

c) 300 %

d) $48 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

e) 68 cm²,
136 cm²,
1086 cm²

f) 64

g) 12 cm²

84. 40 Tage, 45 Tage, 50 Tage

86.

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{125}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{125}{128}$	$\frac{3125}{2048}$

88. a)

t	0	1	2	3	4	6
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{729}{128}$

b) $f(t) = \frac{1}{2} \cdot 1.5^t$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

90. a)

t	-1	0	2	3	5	10
$f(t)$	$\frac{32}{243}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{729}{64}$

b) $f(t) = \frac{16}{81} \cdot 1.5^t$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{81}{16}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

92. nach 17 Monaten

94.

t	-4	-3	0	1	3	5
$f(t)$	40.5	27	8	5.33	2.37	1.05

96. a)

t	0	2	2.5	3	6	8
$f(t)$	$\frac{243}{8}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{9}{2}\sqrt{6}$	9	$\frac{8}{3}$	$\frac{32}{27}$

b) $f(t) = \frac{243}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{8}{27}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

97. a)

t	-3	1	4	6	9	11
$f(t)$	$\frac{3}{256}$	$\frac{3}{16}$	1.5	6	48	192
- b) $f(t) = \frac{3}{32} \cdot 2^t$
- c) 2
- d) 512
- e) $\sqrt{2}$
99. 64, 4
101. 0.25, 0.5
103. a)

	wahr	falsch
a)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

	wahr	falsch
c)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
d)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
105. a) $a = 1.2$
- b) $a = 0.12$
107. a) +40 %
- b) -75 %
109. a) 512
- b) $2\sqrt{2}$
- c) $8^{\frac{1}{12}}$
- d) $16\sqrt{2}$
111. a) $\frac{5}{2}$
- b) $\frac{2}{3}$
113. a) $\frac{3}{4}$
- b) 57.81 %
- c) 2027
115. a) 4530
- b) 10 %
117. a) $42\,256\text{ m}^3$
- b) $76\,318\text{ m}^3$
- c) 3 %
119. a) Fr. 4 251 998.–
- b) Fr. 354 437.–
- c) 22 %
121. a) $f(t) = 4820 \cdot \sqrt[16]{2}^t$
- b) 7433
- c) 27 266
- d) 2027
123. a) $f(t) = 4.8 \cdot 0.75^t$
- b) 1.52 cm, 0.85 cm, 0.27 cm
- c) 17.80 %
98. a)

t	-3	1	4	6	9	11
$f(t)$	$\frac{3}{256}$	$\frac{3}{16}$	1.5	6	48	192
- b) $f(t) = \frac{3}{32} \cdot 2^t$
- c) 2
- d) 512
- e) $\sqrt{2}$
100. 27, 3
102. $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}$
104. a)

	wahr	falsch
a)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 c)

	wahr	falsch
c)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
d)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
106. a) $a = 2.25$
- b) $a = 0.87$
108. a) +150 %
- b) -70 %
110. a) $\frac{9}{16}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$
- d) $\frac{27}{64}$
112. a) 1
- b) $\frac{1}{2}$
114. a) $\frac{4}{5}$
- b) 48.8 %
- c) 2029
116. a) 620
- b) 41.42 %
118. a) 2679
- b) 146 600
- c) 56 %
120. a) Fr. 56 419.–
- b) Fr. 2112.–
- c) 28 %
122. a) $f(t) = 26\,350 \cdot \sqrt[30]{3}^t$
- b) 35 319
- c) 105 958
- d) 11 773
124. a) $f(t) = 500 \cdot 0.86^t$
- b) 318 mg, 174 mg
- c) 47.04 %

125. a) $f(t) = 20 \cdot 0.9^t$

b) 13.1 Lux

c) 1.6 Lux

d) 34.87 %

127. a) $f(n) = 10\,000 \cdot 1.015^n$

b) $f(10) = 11\,605.41,$

$f(20) = 13\,468.55,$

$f(50) = 21\,052.42$

129. 2.5 %

126. a) $f(h) = 1.013 \cdot 0.88^h$

b) 958 hPa

c) 608 hPa

d) 32.27 %

128. a) $f(n) = 15\,000 \cdot 1.011^n$

b) $f(10) = 16\,734.12,$

$f(20) = 18\,668.71,$

$f(50) = 25\,920.84$

130. 2.8 %

9.3 Die Zahl e

131. a) Fr. 2.–

b) Fr. 2.25

c) Fr. 2.44

d) Fr. 2.61

e) Fr. 2.7145

f) Fr. 2.71812

g) Fr. 2.71823

h) Fr. $1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

133. a) 2.25, -17.23 %

b) 2.59, -4.58 %

c) 2.7048, -0.495 %

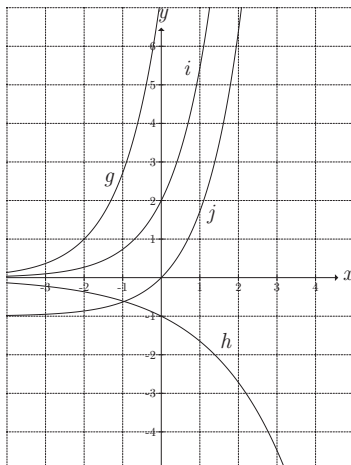
d) 2.71692, -0.049954 %

135. a) $2.708\bar{3}$, -0.37 %

b) 2.71827877, -0.00011 %

137. $f: x \mapsto y_5, g: x \mapsto y_1, h: x \mapsto y_4, i: x \mapsto y_2, j: x \mapsto y_6, k: x \mapsto y_3$

139.



132. a) Fr. 200

b) Fr. 225

c) Fr. 244

d) Fr. 261

e) Fr. 271.452

f) Fr. 271.812

g) Fr. 271.823

h) Fr. $100 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

134. a) 2.718145927, -0.00499954 %

b) 2.718268237, -0.000499995 %

c) 2.718280469, -0.00005 %

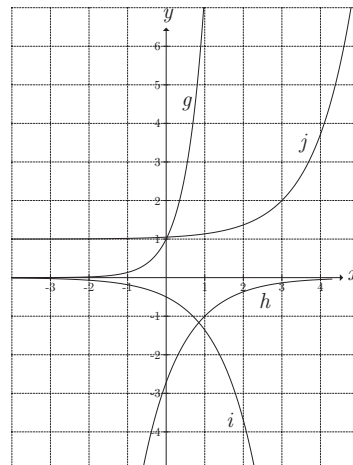
d) 2.718281693, -0.000005 %

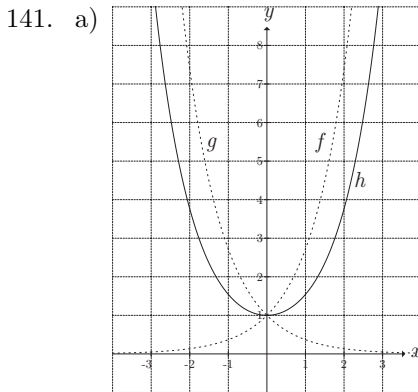
136. a) $2.\bar{6}$, -1.89882 %

b) 2.718281828, ca. 0 %

138. $f: x \mapsto y_6, g: x \mapsto y_1, h: x \mapsto y_3, i: x \mapsto y_4, j: x \mapsto y_2, k: x \mapsto y_5$

140.





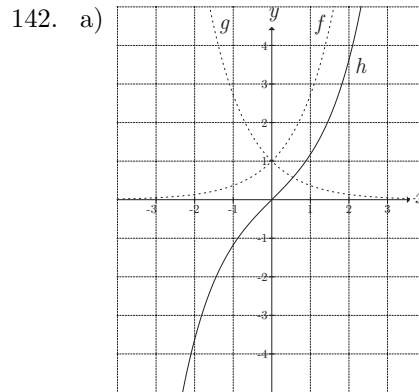
b) $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

c) monoton fallend auf \mathbb{R}^- , monoton wachsend auf \mathbb{R}^+

143. a) $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

b) $x = 0$

c) ungerade



b) $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$

c) auf ganz \mathbb{R} monoton wachsend

144. a) $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1} + \frac{2}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}$

b) $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
Beide Summanden im Zähler immer positiv

c) ungerade

145. a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$
 $= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x})$
 $= \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$

b) $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$
 $= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$
 $= \frac{1}{4}(2e^{x+y} + 2e^{-x-y})$
 $= \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)})$
 $= \cosh(x+y)$

$\cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$
 $= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} - e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$
 $= \frac{1}{4}(2e^{x-y} + 2e^{-x+y})$
 $= \frac{1}{2}(e^{x-y} + e^{-(x-y)})$
 $= \cosh(x-y)$

$$\begin{aligned}
 146. \quad \text{a) } \cosh^2(x) + \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\
 &= \frac{1}{4} (2e^{2x} + 2e^{-2x}) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{2x} + e^{-2x}) \\
 &= \cosh(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\
 &= \frac{1}{4} (2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-(x+y)}) \\
 &= \sinh(x+y) \\
 \sinh(x) \cosh(y) - \cosh(x) \sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} - e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\
 &= \frac{1}{4} (2e^{x-y} - 2e^{-x+y}) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{x-y} - e^{-(x-y)}) \\
 &= \sinh(x-y)
 \end{aligned}$$

9.4 Logarithmen und Logarithmusfunktion

147. a) $10^x = 100$; 2 c) $3^x = 27$; 3 148. a) $10^x = 1000$; 3 c) $81^x = 9$; $\frac{1}{2}$
 b) $16^x = 2$; $\frac{1}{4}$ d) $2^x = \frac{1}{8}$; -3 b) $2^x = 8$; 3 d) $2^x = \frac{1}{4}$; -2
149. a) $x = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$ 150. a) $x = \log_{10} \frac{1}{100} = -2$
 b) $x = \log_{\frac{1}{3}} 243 = -5$ b) $x = \log_2 \frac{1}{32} = -5$
 c) $x = \log_{64} 2 = \frac{1}{6}$ c) $x = \log_9 3 = \frac{1}{2}$
 d) $x = \log_4 \frac{1}{16} = -2$ d) $x = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$
151. a) 2 c) 4 152. a) 3 c) $\frac{1}{4}$
 b) $\frac{1}{2}$ d) 3 b) $\frac{1}{2}$ d) 2
153. a) -2 c) -3 154. a) -3 c) $-\frac{1}{5}$
 b) -1 d) -1 b) -2 d) -4
155. a) $\frac{1}{2}$ c) nicht definiert 156. a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{2}$
 b) nicht definiert d) -3 b) $-\frac{1}{2}$ d) nicht definiert
157. a) 3 c) 0 158. a) -2 c) nicht definiert
 b) $-\frac{1}{8}$ d) -2 b) 2 d) 0
159. Gefäss 1: \mathcal{D} , \mathcal{F} 160. Gefäss 1: \mathcal{B} , \mathcal{G}
 Gefäss 2: \mathcal{A} , \mathcal{B} Gefäss 2: \mathcal{A} , \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{H}
 Gefäss 3: \mathcal{C} , \mathcal{E} , \mathcal{G} , \mathcal{H} Gefäss 3: \mathcal{C}
161. a) 3 c) $\frac{1}{2}$ 162. a) $-\frac{1}{2}$ c) -1
 b) -2 d) -2 b) -2 d) 3
163. a) -2 c) -1 164. a) $-\frac{1}{3}$ c) 4
 b) -4 d) $-\frac{1}{3}$ b) -2 d) $-\frac{1}{2}$