

# 1. Ganzzahlige Potenzen **Lösungen**

## Selber Erforschen

**Aufgabe 1:** Alice, Bob und Carol beschäftigen sich mit Potenzen. Sie sind bei den folgenden Rechnungen ungleicher Meinung, was das richtige Resultat ist. Wer hat jeweils recht und was haben sich die anderen falsch überlegt?

a)  $2^7 \cdot 2^{10} = \dots$

Vorschlag Alice:  $2^{17}$

Vorschlag Bob:  $2^{70}$

Vorschlag Carol:  $4^{70}$

Alice hat recht: Man rechnet  $\underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{7 \text{ mal}} \cdot \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{10 \text{ mal}}$ , also insgesamt ein Produkt aus 17 Zweien.

b)  $3^5 \cdot 7^5 = \dots$

Vorschlag Alice:  $21^{10}$

Vorschlag Bob:  $21^{25}$

Vorschlag Carol:  $21^5$

Carol hat recht: Man kann die Terme so umordnen, dass man  $\underbrace{(3 \cdot 7) \cdot \dots \cdot (3 \cdot 7)}_{5 \text{ mal}}$  erhält, also

$$(3 \cdot 7)^5 = 21^5$$

c)  $(3^4)^5 = \dots$

Vorschlag Alice:  $3^9$

Vorschlag Bob:  $3^{20}$

Vorschlag Carol:  $3^{(4^5)}$

Bob hat recht: Denn die Rechnung ist nichts anderes als  $\underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{5 \text{ mal}}$ , total kommen also  $4 \cdot 5 = 20$  Dreien vor.

d)  $\frac{12^5}{3^5} = \dots$

Vorschlag Alice:  $9^5$

Vorschlag Bob:  $\left(\frac{12}{3}\right)^5$

Vorschlag Carol:  $4^5$

Bob und Carol haben beide recht, wenn Bob den Bruch noch kürzen würde, erhielte er die gleiche Lösung wie Carol. Die Überlegung ist folgende:

$$\frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{12}{3} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{12}{3}$$

e)  $\frac{5^{16}}{5^8} = \dots$

Vorschlag Alice:  $5^8$

Vorschlag Bob:  $1^8$

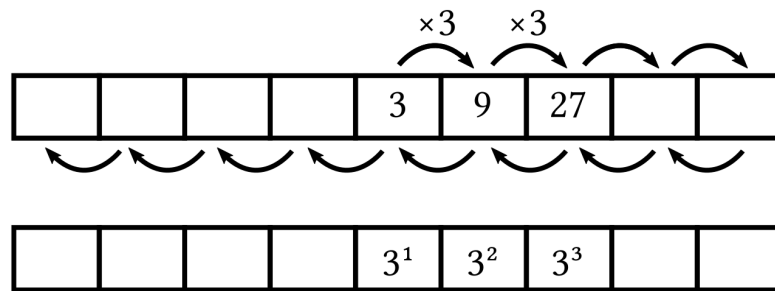
Vorschlag Carol:  $5^2$

Alice hat recht: Im Zähler hat es 16 Faktoren 5, im Nenner 8. Das heisst, wir können acht mal einen Faktor 5 kürzen, sodass im Zähler noch 8 verbleiben, und im Nenner keine mehr:

$$\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \frac{5^8}{1} = 5^8$$

**Aufgabe 2:** Was könnten Ausdrücke wie  $3^0$  oder  $3^{-5}$  bedeuten? Der Ausdruck  $3^5$  ist bekanntlich nur eine Kurzschreibweise für  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ , aber wir können nicht ein Produkt aus minus fünf Dreien bilden. Wir müssen dem Term  $3^{-5}$  also eine Bedeutung *geben*.

- a) Führe die Muster in dem folgenden Bild fort: Beschrifte alle Pfeile und schreibe passende Terme in die leeren Boxen.



- b) Verallgemeinere deine Erkenntnisse zu einer sinnvollen Definition:

- Für irgendeine Zahl  $a$  sei  $a^0 :=$
- Für irgend eine natürliche Zahl  $n$  sei  $a^{-n} :=$

## Üben und Anwenden

**Aufgabe 3:** Angenommen, es gibt  $2 \cdot 10^{12}$  Galaxien im beobachtbaren Teil des Universums, und es gibt durchschnittlich  $10^{11}$  Sterne pro Galaxie. Wie viele Sterne gibt es dann im beobachtbaren Teil des Universums?  $2 \cdot 10^{12} \cdot 10^{11} = 2 \cdot 10^{23}$

**Aufgabe 4:** Vereinfache die Terme schrittweise soweit wie möglich. Notiere in jedem Schritt, welche Rechenregel (z.B. Potenzgesetze P1–P5) du anwendest.

- a)  $\frac{a^{19}}{a^{15}} \stackrel{P5}{=} a^4$
- b)  $b \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot b^4 \cdot b^5 \stackrel{P1}{=} b^{15}$
- c)  $\left((c^2)^3\right)^4 \stackrel{P3}{=} (c^2)^{12} \stackrel{P3}{=} c^{24}$
- d)  $d^7 \cdot e^7 \cdot f^7 \stackrel{P2}{=} (def)^7$
- e)  $\frac{g^5 \cdot h^5}{k^5} \stackrel{P2}{=} \frac{(gh)^5}{k^5} \stackrel{P4}{=} \left(\frac{gh}{k}\right)^5$
- f)  $4^4 \cdot 3^4 \cdot 0.25^4 \stackrel{P2}{=} (4 \cdot 3 \cdot 0.25)^4 = 3^4$
- g)  $(5 \cdot a^2 \cdot b^7)^4 \stackrel{P2}{=} 5^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (b^7)^4 \stackrel{P3}{=} 5^4 a^8 b^{28}$
- h)  $\frac{(6a^6b^8)^4}{(3a^5b^2)^4} \stackrel{P4}{=} \left(\frac{6a^6b^8}{3a^5b^2}\right)^4 \stackrel{P5}{=} (2ab^6)^4 \stackrel{P2+P3}{=} 2^4 a^4 b^{24}$ . Alternative zuerst P2+P3, dann kürzen
- i)  $(x^2 \cdot y^3 \cdot z^4)^5 \cdot (x^4 \cdot y^3 \cdot z^2)^5$   
 $\stackrel{P2}{=} (x^2 \cdot y^3 \cdot z^4 \cdot x^4 \cdot y^3 \cdot z^2)^5 \stackrel{P1}{=} (x^6 \cdot y^6 \cdot z^6)^5 \stackrel{P2}{=} ((xyz)^6)^5 \stackrel{P3}{=} (xyz)^{30}$
- j)  $(a^2 + a^3) \cdot (a^3 - a^2) \stackrel{3. \text{ Binom}}{=} (a^3)^2 - (a^2)^2 \stackrel{P3}{=} a^6 - a^4$ . Optional kann noch  $a^4$  ausgeklammert werden.
- k)  $(3m^2 + 5n^7)^2 \stackrel{1. \text{ Binom}}{=} (3m^2)^2 + (5n^7)^2 + 2 \cdot (3m^2) \cdot (5n^7) \stackrel{P1+P3}{=} 9m^4 + 25n^{14} + 30m^2n^7$
- l)  $(p + q)^{18} \cdot (p - q)^{18} \stackrel{P2}{=} ((p + q)(p - q))^{18} \stackrel{3. \text{ Binom}}{=} (p^2 - q^2)^{18}$
- m)  $\frac{m^{4b+7}}{m^{2b+5}} \stackrel{P5}{=} m^{4b+7-2b-5} = m^{2b+2}$

**Aufgabe 5:** Nico soll die Ruheenergie eines Elektrons ausrechnen. Er sucht dazu in einer Formelsammlung die nötigen Zahlen zusammen und notiert:

$$E_e = m_e \cdot c^2 \approx 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 J$$

Jetzt soll Nico diesen Wert so weit von Hand (ohne TR) ausrechnen und vereinfachen, wie möglich. Kannst du ihm dabei helfen? Notiere einen detaillierten Lösungsweg und welche Regeln du verwendet hast.

$$\begin{aligned} 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 J &\stackrel{\text{R3}}{=} 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} J \\ &= 81.9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{16} J \\ &= 8.19 \cdot 10 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{16} J \\ &\stackrel{\text{R1}}{=} 8.19 \cdot 10^{-14} J \end{aligned}$$

**Aufgabe 6:** Vereinfache die Terme soweit wie möglich, und gib jeweils die verwendete Rechenregel an.

- a)  $(a^3 \cdot a \cdot a^0 \cdot a^{-2}) : (a^4 \cdot a^{-5}) \stackrel{\text{Def}}{=} a^3 \cdot a \cdot a^0 \cdot a^{-2} \cdot a^{-4} \cdot a^5 \stackrel{\text{R1}}{=} a^{3+1+0-2-4+5} = a^3$
- b)  $\frac{1}{3^{-7}} \cdot 3^8 = \frac{3^8}{3^{-7}} \stackrel{\text{R5}}{=} 3^{8-(-7)} = 3^{15}$
- c)  $(18y)^{-4} : (9y)^{-4} \stackrel{\text{R4}}{=} \left(\frac{18y}{9y}\right)^{-4} = 2^{-4} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{2^4}$
- d)  $\left(\left((a^2)^{-3}\right)^4\right)^{-5} \stackrel{\text{R3}}{=} a^{2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)} = a^{120}$

**Aufgabe 7:** Ordne diese Terme der Grösse nach:  $a^0, a^{-999}, a^{99}, a, a^{999}, \frac{1}{a^9}, a^{-99}, \frac{1}{a^{-9}}$

- a) Falls  $a > 1$ .  $a^{-999} < a^{-99} < \frac{1}{a^9} < a^0 < a < \frac{1}{a^{-9}} < a^{99} < a^{999}$
- b) Falls  $0 < a < 1$ . **Genau umgekehrt wie in a)**

**Aufgabe 8:** Drücke diese Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise mit (genau) vier signifikanten Ziffern aus.

- a)  $432.5 = 4.325 \cdot 10^2$
- b)  $75'688'651'268'576 \approx 7.569 \cdot 10^{13}$
- c)  $10'000 = 1.000 \cdot 10^4$
- d)  $0.003 = 3.000 \cdot 10^{-3}$