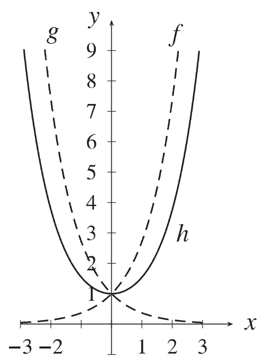
56 Die Funktionsgleichung der transformierten Kurve lautet $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} + 4$.

57



58 a) Wachstumsfaktor 2; Wachstumsrate 1; Wachstumsfunktion $f(n) = 2^n$ (n-te Generation)

b) $2^{20} = 1'048'576$; ungefähr das Doppelte der Schweizer Bevölkerung um 1500 n. Chr.

59 Wachstumsfaktor $2^{\frac{\Delta t}{1.5}}$ (Zeitspanne Δt in Jahren); Wachstumsrate $2^{\frac{\Delta t}{1.5}} - 1$;
Wachstumsfunktion $s(t) = s_0 \cdot 2^{\frac{t}{1.5}}$ (t in Jahren, $s_0 = s(0)$);
1'099'512 Gigabit/cm^2 im Jahr 2030

60 Zerfallsfaktor 0.88 pro km; Zerfallsrate −0.12 pro km;
Zerfallsfunktion $p(h) = p_0 \cdot 0.88^h$ (h in km, $p_0 = p(0)$); 329 hPa in 8800 m Höhe

61 a) 29.29 % b) $b = 0.9$

62 50 Tage

63 a) $a = 2, b = 3$ b) $a = 5, b = 0.5$ c) $a = 10^{-6}, b = 10^{-2}$

64 a) 0.22 m b) $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ m c) 46.87 %

65 $T(0) = 20; T(t+1) - T(t) = 0.2 \cdot (6 - T(t)) \Leftrightarrow T(t+1) = 0.8 \cdot T(t) + 1.2$
(Explizit: $T(t) = 14 \cdot 0.8^t + 6$)

Ergebnisse zu Kapitel 6.3

66 a) $x = 0$ b) $x = -1$ c) $x = -5$ d) $x = -9$ e) Unlösbar

67 a) $x = 3$ b) $x = \frac{5}{3}$ c) $x = -3$ d) $x = -6$

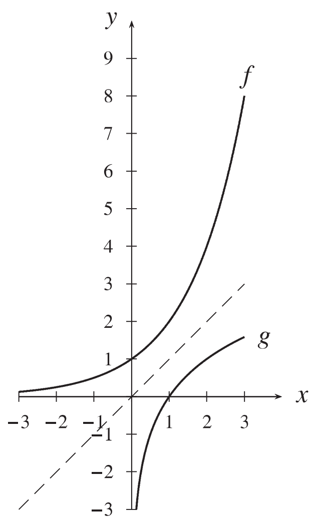
68	a) $x = 1$		b) $x = 4$	
69	a) $x = 4$		b) $x = 3$	
70	a) $x = \log_7 5$	b) $x = \log_p q$	c) $x = \log_a \left(\frac{p}{q}\right)$	d) $x = \log_{\left(\frac{a}{b}\right)} c$
71	a) $2^5 = 32$	b) $5^3 = 125$	c) $3^{-3} = \left(\frac{1}{27}\right)$	d) $49^{\frac{1}{2}} = 7$
72	a) $x = \log_9 5$	b) $x = \log_2 3$	c) $x = \log_{\left(\frac{a}{b}\right)^2} c$	d) $x = \log_{6^3} 6^2 = \frac{2}{3}$
73	a) $u^x = v$	b) $2^x = 12$	c) $\sqrt{2}^y = x$	d) $c^z = \frac{2}{d}$

74	a) 4	b) 0	c) 2	d) 3	e) 3	f) −2	g) −3	h) −6
75	a) 3	b) 5	c) 10	d) −2	e) −11	f) −3	g) 36	h) −9

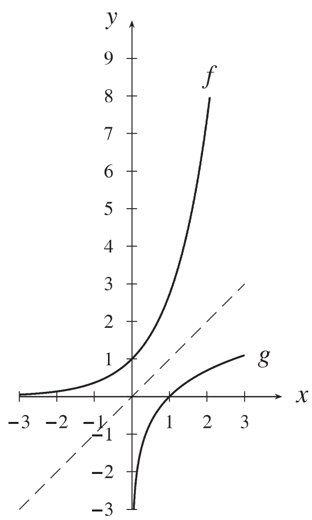
76	a) 4	b) 12	c) −4	d) 14
77	a) 2	b) −1	c) $\frac{2}{3}$	d) $-\frac{3}{2}$
78	a) $\frac{1}{2}$	b) −3	c) $\frac{3}{4}$	d) 0
79	a) −3	b) −4	c) 3	d) 1.5
80	a) 1	b) 0	c) 3	d) −2
81	a) 1	b) 0	c) 1	d) 1
82	a) 36	b) 5	c) $\sqrt{10}$	d) $\frac{1}{5}$
83	a) 4	b) 16	c) $\frac{1}{4}$	d) 8
84	a) 4	b) 16	c) $\frac{1}{4}$	d) 8
85	a) $x = 4$	b) $x = 2$	c) $x = \frac{1}{2}$	d) $x = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
86	a) $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	b) $\{\}$	c) 100	d) $\frac{1}{100}$
87	a) $\mathbb{R}^+$	b) $\mathbb{R}$	c) $x = \frac{1}{3}$	d) $x = e^e$
88	a) $x_{1,2} = \pm 10$	b) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{10}$	c) $x_{1,2} = \pm 10^5$	d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{10}$

89 a) $x = 5$ b) $x = \frac{1}{9}$

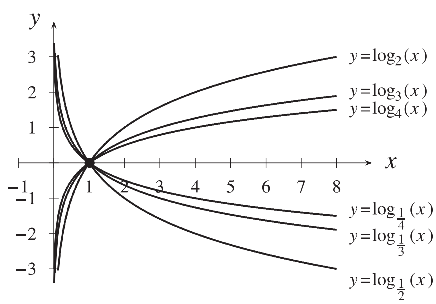
90 a)



b)



91

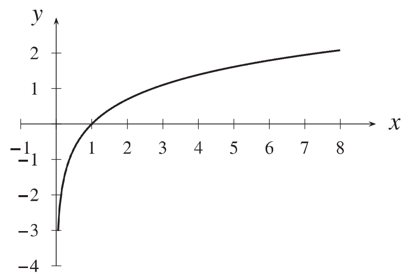


92 a) $a = 3$ b) $a = 16$ c) $a = 16$ d) $a = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

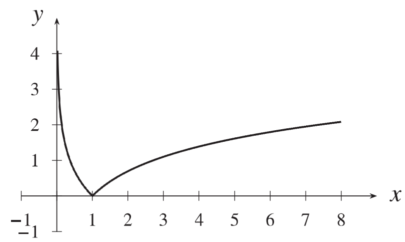
93 a) $y = \lg(x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

c) $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \log_2(x)$; $x \mapsto \log_8(x)$ d) $y = 5^{2x}$

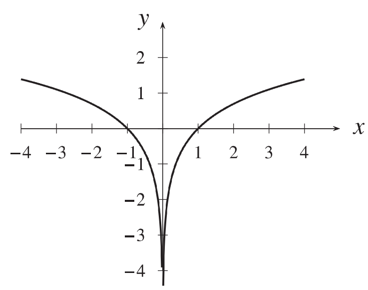
94 a) $D = \mathbb{R}^{+}, \quad W = \mathbb{R}$



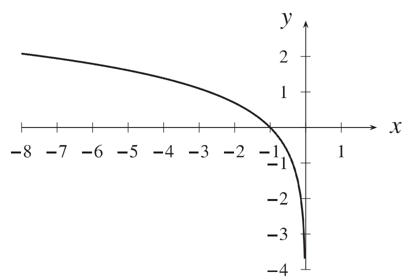
b) $D = \mathbb{R}^{+}, \quad W = \mathbb{R}_0^{+}$



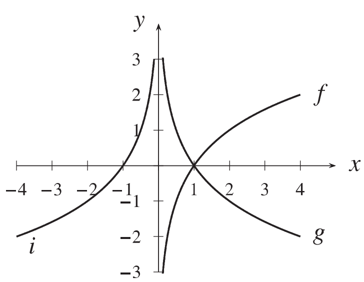
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad W = \mathbb{R}$



d) $D = \mathbb{R}^{-}, \quad W = \mathbb{R}$



95



a) Spiegelung an der x-Achse

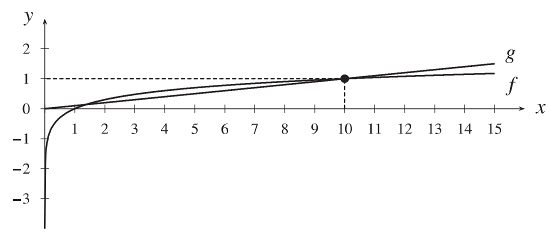
b) Punktspiegelung am Ursprung

96 a) $f(x) = \log_3(x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ c) $f(x) = \log_6(3x)$

97 a) $y = \log_2(x)$ b) $y = -\log_3(x+2)$

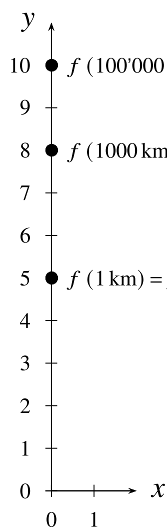
98 $f(x) = \log_{10} x = \lg x$: durchschnittliche Steigungen von 0.30, 0.18, 0.12, 0.10, 0.08
$g(x) = 10x$: durchschnittliche Steigungen von 10, 10, 10, 10, 10
Die Steigungen von f nehmen ab, die Steigungen von g sind stets gleich gross.

99 a)

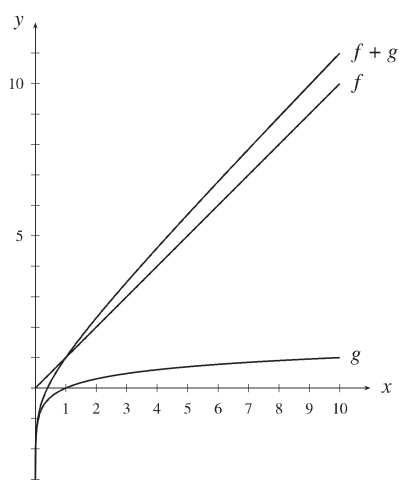


Für $x > 10$ ist $0.1 \cdot x > \lg(x)$.

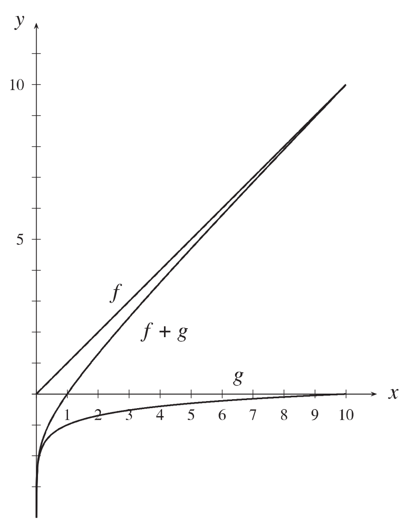
b)



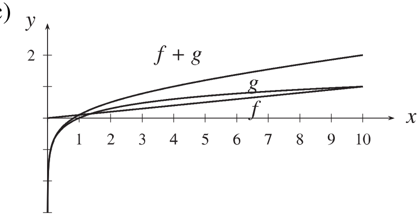
100 a)



b)



c)



101 a) $\log b + \log c$ b) $\log p + \log q + \log r$ c) $\log b - \log c$ d) $-\log m$

102 a) $\log b + \log c - \log d$ b) $\log e - \log f - \log g$
c) $\log p + \log q + \log r - \log s - \log t$ d) $\log b - \log(c + d)$

103 a) $3 \log b$ b) $7 \log m$ c) $-5 \log b$ d) $\frac{4}{5} \log r$

104 a) $-2 \log c$ b) $\frac{1}{2} \log s$ c) $\frac{1}{3} \log b$ d) $-\frac{1}{3} \log r$

105 a) $3 \log b + 5 \log d$ b) $\log 12 + \log b + n \log d - \log 5 - \log c - r \log f$
c) $\log 5 + 4 \log c - \log 8 - 6 \log d$ d) $5 \log(x - 4)$

106 a) 0 b) 0 c) 0 d) $\log\left(\frac{6}{25}\right)$

107 a) $\log(mn)$ b) $\log \frac{m}{n}$ c) $\log\left(m^3\right)$ d) $\log \sqrt{m}$

108 a) $\log m$ b) $\log\left(x^6\right)$ c) $\log y$ d) $\frac{5}{4}$

109 a) $\log \frac{bc}{de}$ b) $\log \frac{b^3 c^2}{d^4}$

110 a) $\log \frac{1}{xyz} = -\log(xyz)$ b) $\log \frac{x^{\frac{3}{4}} z^3}{\sqrt{y}}$

111 a) $\log \frac{x^2 y^3}{(uv)^5}$ b) $\log\left(a^{\frac{5}{4}}\right)$

112 a) Falsch b) Falsch c) Richtig (Gesetz I)
d) Falsch e) Falsch f) Falsch

113 $d < b < a < c$

114 a) $xy = 10^4$ b) $\frac{x}{y} = 10$

115 $1 - a$

116 a) $\lg\left(\frac{1}{100}\right) = -2$ b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100\cdot101}{2} = 5050$

c) $\ln\left(\frac{9}{e^3}\right)$ d) $\ln\left(\sqrt{e^3}\right) = \frac{3}{2}$

e) $\ln\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\right) = \ln\left(\frac{63}{256}\right)$

117 a) $x = 2^{10} = 1024$ b) $x = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$ c) $x = e^2$ d) $x_{1,2} = \pm a$

118 a) $x = \sqrt{e}$ b) $x = -49$ c) $x_1 = 3; x_2 = 5$ d) $x = 2$

119 a) $x = -\frac{4}{5}$ b) $x = 199$

120 a) $x = e^{-\frac{4}{5}}$ b) $x = e^{\frac{6}{5}}$

c) $x_1 = 10^{-7}; x_2 = 10^8$ d) $x_1 = 1000; x_2 = 10^{-\frac{3}{5}}$

121 a) Korrekt b) Falsch, nur $x = 10$ ist korrekt.

c) Falsch, es gibt zwei Lösungen $x_1 = 1; x_2 = 100$.

122 a) $\frac{\lg 1000}{\lg 100} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{\lg 10}{\lg 0.1} = \frac{1}{-1} = -1$ c) $\frac{\lg 5}{\lg 2}$ d) $\frac{\lg\left(|x|^{10}\right)}{\lg 3}$

123 a) $\ln 2$ b) $\lg 7$ c) $\log_{\sqrt{3}} 64$ d) $\log_2 5$

124 a) 2 b) $\frac{1}{4}$ c) 3

125 Korrekt, denn $\log_{a^n}(x^n) = \frac{\log_a(x^n)}{\log_a(a^n)} = \frac{n\cdot\log_a(x)}{n\cdot\log_a(a)} = \log_a(x)$

126 a) $\log_a b \cdot \log_b a = \log_a b \cdot \frac{\log_a a}{\log_a b} = \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 1$

b) Mit a) ist $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, d. h. $\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a}$.

127 a) $x = 3$ b) $x = 9$ c) $x = 49$ d) $x = 16$

128 a) $x = 4$ b) $x_1 = 7; x_2 = \frac{1}{343}$

129 a) $L = \{\}$ b) $x_1 = \frac{1}{8}; x_2 = 8$

130 a) $n \geq 40$ b) $n \geq 44$ c) $n \geq 31$ d) $n \geq 9$

131 a) $n = 630$ b) $171 \leq n \leq 173$

c) $42 \leq n \leq 95$ d) $995'715 \leq n \leq 1'458'695$

132 a) $x = 3.459$ b) $x = 1.145$ c) $x = 23.74$

133 a) $x = -4.605$ b) $x = 3.049$ c) $x = -0.08835$

134 a) $x = 121.6$ b) $x = 0.09463$ c) $x = -7.843$

135 a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 10.57$ c) $x_1 = 100; x_2 = \frac{1}{100}$

136 a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = 3$ c) $x = 2$

137 a) $x = -7.827$ b) $x = 0.3962$ c) $x = 0.4769$

138 a) $x = 1.380$ b) $x = 1.203$ c) $x = 0.4812$

139 a) $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = 1.969$ b) $x_{1,2} = \pm 0.2263$ c) $x = 1$

140 a) 1.15 Milliarden b) 2037 c) 28.07 Jahre

141 a) 89 b) 11.74 Jahre c) 2023 d) 5.73 %

142 März 2027

143 a) $t_d = \log_b(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(b)}$ ist unabhängig von a und t.

b) $t_h = -\log_b(2) = -\frac{\ln(2)}{\ln(b)}$ ist unabhängig von a und t.

144 a) $\lg(1) = 0$; $\lg(4) = 2 \cdot \lg(2) = 0.60206$; $\lg(5) = \lg\left(\frac{10}{2}\right) = 1 - \lg(2) = 0.69897$;
$\lg(6) = \lg(2) + \lg(3) = 0.77815$; $\lg(8) = 3\lg(2) = 0.90309$;
$\lg(9) = 2 \cdot \lg(3) = 0.95424$; $\lg(10) = 1$

b) $\lg(60) = \lg(6) + \lg(10) = 1.77815$; $\lg(126) = \lg(2) + \lg(7) + \lg(9) = 2.10037$;
$\lg(144) = 2 \cdot \lg(2) + 2 \cdot \lg(6) = 2.15836$

c) $\lg\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot \lg(6) = 0.389075$; $\lg\sqrt{35} = \frac{\lg(5)+\lg(7)}{2} = 0.772035$;
$\lg\sqrt{1024} = 5 \cdot \lg(2) = 1.50515$

145 a) $3^{13'000}$ b) $0.9^{30'000}$

146 a) 2, 7, 2447 b) 1, 6, 4'485'888 c) 1, 4, 3033

147 a) 1813, 1, 900 b) 1501, 3, 1350

148 a) 512 b) 4096 c) 8 d) 32 e) 256 f) 4096 g) 8 h) 4

149 a) $x_1 = 1.0001^{1000} = 1.10516539$ b) $y = 0.0001n$

c) $a^{0.0001} = 1.0001 \Leftrightarrow a = 1.0001^{10'000} = \left(1 + \frac{1}{10'000}\right)^{10'000} = 2.71814593$
a ist um 0.005 % kleiner als e = 2.718281828 . . ..

150 a) Annahme ($p, q \in \mathbb{N}$): $\lg 2 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = 10^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow 2^q = 10^p = 2^p \cdot 5^p \Leftrightarrow 2^{q-p} = 5^p$
Die letzte Gleichung ist widersprüchlich.

b) Annahme ($p, q \in \mathbb{N}$): $\log_5 2 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = 5^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow 2^q = 5^p$
Die letzte Gleichung ist widersprüchlich.

c) Annahme ($p, q \in \mathbb{N}$): $\log_a b = \frac{p}{q} \Leftrightarrow b = a^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow b^q = a^p$
Die letzte Gleichung ist widersprüchlich.

151 $\log_{100}\left(10^{22}\right) = 11$ Verdünnungsschritte

152 Notation: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

a)

n	10	100	1000	10'000	100'000
$\lg n$	1	2	3	4	5
Stellen von n	2	3	4	5	6

Anzahl Stellen von $n = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

b)

n	2	4	8	16	32
$\operatorname{lb} n$	1	2	3	4	5
Stellen von n (binär)	2	3	4	5	6

Anzahl Stellen von $n = \lfloor \operatorname{lb} n \rfloor + 1$

c) Stellenwertsystem mit Basis a: Anzahl Stellen von $n = \lfloor \log_a n \rfloor + 1$

153 $p = \frac{c}{a^{\log_b(d)}}$; $q = \log_b(d)$

154 a) $D = \mathbb{R} \setminus [-3, 0]$ b) $D =]1, \infty[$

155 $y = c \cdot a^x = a^{\log_a(c)} \cdot a^x = a^{x + \log_a(c)}$, d. h., $y = c \cdot a^x$ entsteht aus $y = a^x$ durch Verschiebung um $\log_a(c)$ in negative x-Richtung, die Kurven sind also kongruent.

156 $y = b^x = \left(a^{\log_a(b)}\right)^x = a^{\left(\log_a(b)\right) \cdot x}$, d. h., $y = b^x$ entsteht aus $y = a^x$ durch horizontale Streckung an der y-Achse in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\log_a(b)}$.

157 $a = 2,\ b = 1,\ c = 2$

158 a) $N_0 = Ne^{\lambda t}$; $\lambda = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$; $t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$

b) $m_1 = m_2 - 2.5\lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$; $m_2 = m_1 + 2.5\lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$; $E_1 = E_2 \cdot 10^{\frac{m_2-m_1}{2.5}}$; $E_2 = E_1 \cdot 10^{\frac{m_1-m_2}{2.5}}$

c) $U = \frac{IR}{1-e^{-\frac{R}{L}t}}$; $L = \frac{Rt}{\ln\left(\frac{U}{U-IR}\right)}$; $t = \frac{L}{R}\ln\left(\frac{U}{U-IR}\right)$; die Formel ist nicht nach R auflösbar.

d) $T_a = T_e\left(\frac{V_e}{V_a}\right)^{\kappa-1}$; $T_e = T_a\left(\frac{V_e}{V_a}\right)^{1-\kappa}$; $V_e = V_a\sqrt[\kappa-1]{\frac{T_a}{T_e}}$; $V_a = V_e\sqrt[1-\kappa]{\frac{T_a}{T_e}}$; $\kappa = \log_{\frac{V_e}{V_a}}\left(\frac{T_a}{T_e}\right) + 1$

159 a) Streckung an der x-Achse; Faktor $\frac{1}{2}$ b) Streckung an der x-Achse; Faktor $\frac{2}{3}$

160 Die ersten drei von Null verschiedenen Nachkommaziffern lauten 466.

161 a) 3.169 b) 3.095 c) 0.319 d) 12.629

162 $10^x = 2 \Leftrightarrow x = \lg(2) = 0.301$; $10^{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lg(2)} = \frac{1}{0.301} = 3.32$

163 Bei der Berechnung von $\log_2(0.5)$ wird 0 ausgegeben.
Allgemein: Für die Berechnung von $\log_b(n)$ mit $0 < n < 1$ wird mit dem Verfahren zunächst $\log_b\left(\frac{1}{n}\right)$ berechnet. Es ist dann $\log_b(n) = -\log_b\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ergebnisse zu Kapitel 6.4

164 $\frac{1000}{1+0.02\cdot\frac{269}{360}} = 985.28$ Franken

165 $15'000 = 12'000\left(1 + \frac{150}{360}\cdot\frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow p = 60$, d. h. 60 %

166 $K_0\left(1 + n\cdot\frac{p}{100}\right) = 2K_0 \Leftrightarrow n = \frac{100}{p}$; genau gleich lang wie bei der ersten Verdoppelung

167 a) 439'286'205 Franken b) $2.804 \cdot 10^{21}$ Franken

168 Fr. 11'744.40

169 18 Jahre

170 $\frac{K_{n+1}-K_n}{K_n} = \frac{p}{100}$. Das Resultat ist die Wachstumsrate, die unabhängig von K_0 und n ist.

171 a) $K(t) = 1000\cdot 1.01^t$ b) $K(t) = 1000\cdot\left(\frac{1201}{1200}\right)^{12t}$

c) $K(t) = 1000\cdot\left(\frac{36001}{36000}\right)^{360t}$ d) $K(t) = 1000\cdot e^{\frac{t}{100}}$