3. Oberflächen und Volumen Lösungen

Selber Erforschen

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe leiten wir die Volumenformel einer Pyramide her. Dazu beginnen wir mit einem Dreiecksprisma mit Grundfläche G und Höhe h (und somit Volumen $V = G \cdot h$) und unterteilen es in drei Pyramiden, so wie in Abbildung 1 zu sehen.

a) Verwende den Satz von Cavalieri um die Volumina V_1, V_2 und V_3 miteinander zu vergleichen.
b) Was ist also das Volumen einer Dreiecks-Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h?
c) Skizziere eine Pyramide mit einer komplizierteren Grundfläche. Kannst du diese in Dreieckspyramiden unterteilen und so argumentieren, dass die selbe Formel auch für deine Figur gelten muss?

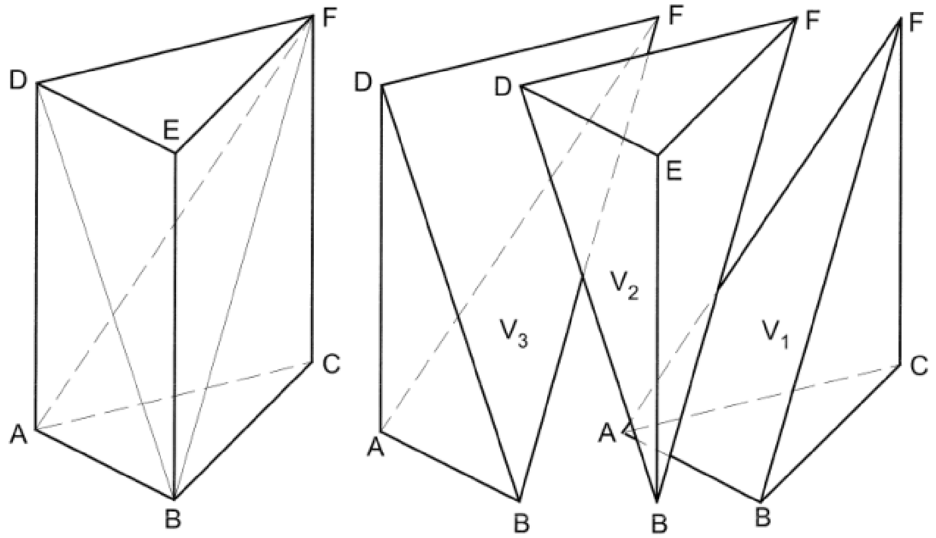
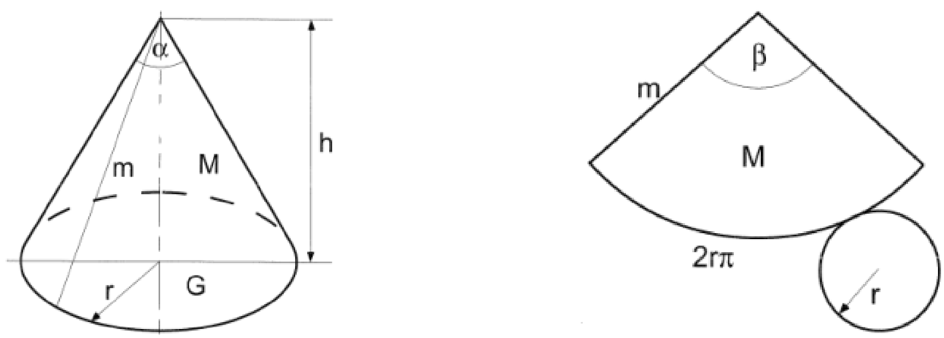


Abbildung 1: Prisma zu drei Pyramiden

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um die Herleitung der Formel für die Oberfläche eines geraden Kegels.



a) Die Mantellinie m ist der Abstand von der Spitze bis zum Rand der Grundfläche (in einer geraden Linie dem Mantel entlang). Berechne m.

b) Im rechten Bild siehst du die Abwicklung der Kegeloberfläche – der Mantel wird dabei zu einem Kreissegment mit einem Öffnungswinkel β. Versuche, eine Formel für den Flächeninhalt von M zu berechnen, in dem nur die Variablen r und m vorkommen.

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es darum, das Volumen einer Kugel zu bestimmen. Betrachte dazu das folgende Bild. Links ist eine Halbkugel mit Radius r abgebildet, rechts ein Zylinder mit gleichem Radius und gleicher Höhe, aus dem ein Kegel "ausgehöhlt" wurde.

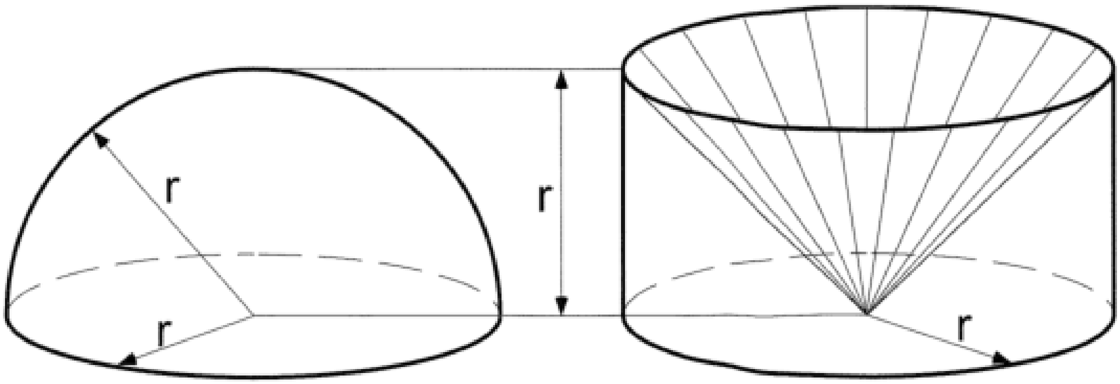


Abbildung 2: Halbkugel und ausgehöhlter Zylinder

a) Berechne die Querschnittflächen dieser Körper bei Höhe h (Schraffierte Flächen in Abbildung 2 unten). Berechne auch ρ mithilfe von r und h, so dass du die beiden Formeln miteinander vergleichen kannst. Pythagoras: $\rho^2 = r^2 - h^2$. Die Fläche links ist also $A_l = \pi\rho^2 = \pi(r^2 - h^2)$, die rechts ist $A_r = \pi r^2 - \pi h^2$. Also $A_l = A_r$

b) Was kannst du über die Volumen der beiden Körper sagen? Berechne das Volumen des rechten Körpers. Satz von Cavalieri: Gleiches Volumen. $V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

c) Was ist das Volumen einer Kugel mit Radius r? $2V$, also $\frac{4}{3}\pi r^3$

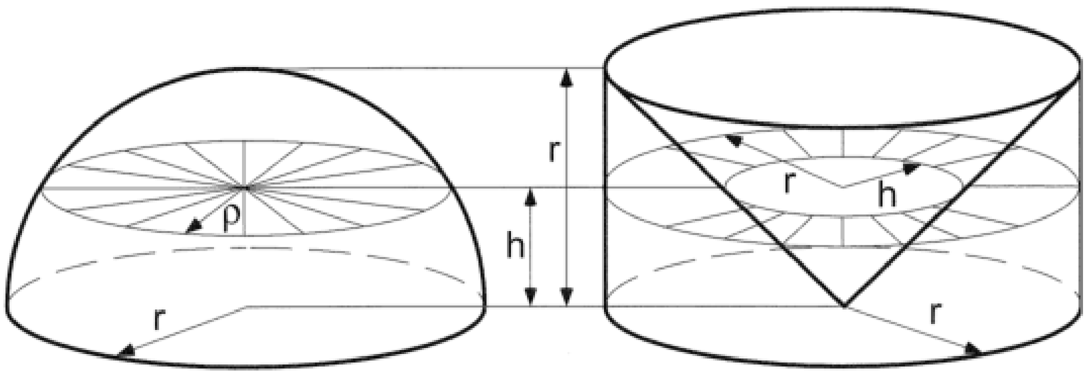
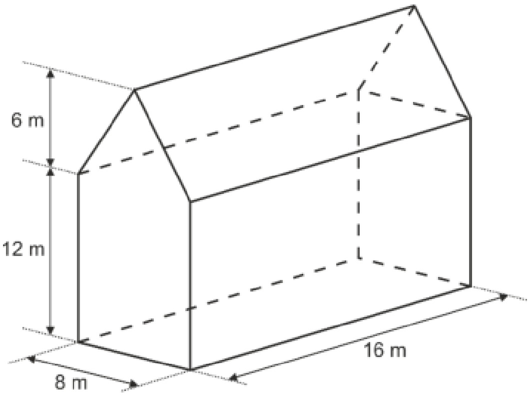


Abbildung 3: Querschnitte

Üben und Anwenden

Aufgabe 4: Berechne das Volumen des Hauses:

$16 \cdot \left(8 \cdot 12 + \frac{8 \cdot 6}{2}\right) m^3 = 1920 m^3$

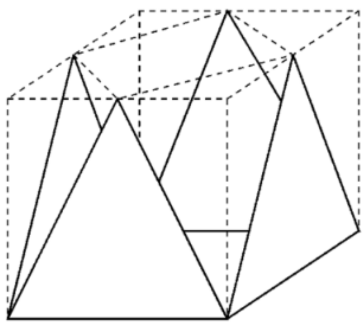


Aufgabe 5: Ein gerades dreiseitiges Prisma mit lauter gleich langen Kanten hat die Oberfläche 679 cm^2. Berechne das Volumen V des Prismas (auf ganze Zahl gerundet).

Sei die Seitenlänge a

- Seitenfläche a^2
- Grundfläche $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- Oberfläche $3 \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2 \stackrel{!}{=} 679$
  $\Rightarrow a^2 = 175.633$
  $\Rightarrow a = 13.253$
- Volumen $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (13.253)^3 = 1007.88 \approx 1008$

Aufgabe 6: Eine Schachtel hat die Form eines quadratischen Prismas mit der Grundkante 60 und der Höhe 50. Durch vier ebene Schnitte werden die Ecken der Deckfläche weggeschnitten. Beim Reststück werden die Seitenwände nach innen geklappt, so dass eine gerade quadratische Pyramide entsteht. Berechne das Volumen V und die Oberfläche S dieser Pyramide.

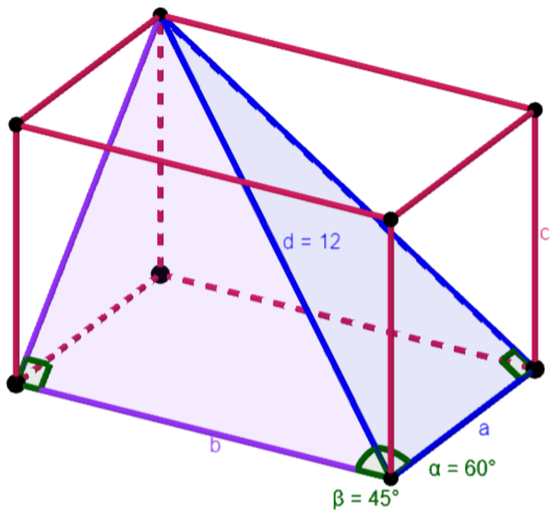


Oberfläche: $60^2 + 4 \cdot \frac{60 \cdot 50}{2} = 9600$

Höhe: Pythagoras: $h = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$

Volumen: $\frac{1}{3} \cdot (60^2 \cdot 40) = 48'000$

Aufgabe 7: Berechne die Oberfläche S eines Quaders aus der Raumdiagonalen $d = 12$ und den Winkeln $\alpha = 60°$ (zwischen Raumdiagonale d und Grundflächenkante a) und $\beta = 45°$ (zwischen Raumdiagonale d und Grundflächenkante b).



Raumdiagonale und Grundflächenkanten bilden jeweils zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\longrightarrow$ Trigo

- $a = \cos(60°) \cdot 12 = 6$
- $b = \cos(45°) \cdot 12 = 6\sqrt{2}$
- $c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2} = 6$
- $S = 2(ab + ac + bc) = 275.65$

Aufgabe 8: Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird zum Mantel eines Zylinders mit der Höhe a gerollt. Berechne Oberfläche und Volumen des Zylinders.

- Umfang: $U = 2\pi r = b \Rightarrow r = \frac{b}{2\pi}$
- Grundfläche: $G = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{b^2}{4\pi}$
- Volumen: $V = a \cdot G = \frac{ab^2}{4\pi}$
- Oberfläche: $O = 2G + M = \frac{b^2}{2\pi} + ab$

Aufgabe 9: Bei einem geraden Zylinder mit Volumen $V = 10\text{cm}^3$ ist die Mantelfläche die Hälfte der Oberfläche. Berechne Radius und Höhe des Zylinders. *Tipp: Bestimme zuerst das Verhältnis von r zu h.*

Da $O = 2G + M$ und $M = \frac{1}{2}O$, ist $M = 2G$, also $2\pi rh = 2\pi r^2$. Daraus folgt sofort $r = h$.

Nun ist $V = 10 = \pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 1.471$, und ebenso h.

Aufgabe 10: Ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathethen $a = 3$ und $b = 5$ rotiert um die Hypothenuse. Es entsteht ein Doppelkegel, berechne dessen Oberfläche und Volumen.

Höhe der Doppelpyramide ist $h = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Nun gilt nach Flächenfomel eines rechtwinkligen Dreiecks: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h$ woraus folgt $r = \frac{15}{\sqrt{34}}$.

Von hier an sind die Berechnungen Routine.

$G = \pi r^2 = \frac{225}{34}\pi$

$V = \frac{1}{3}G(h_1 + h_2) = \frac{1}{3}Gh = 40.41$

$O = M_1 + M_2 = \pi r(3 + 5) = 64.65$

Aufgabe 11: Ein Basketball von 76 cm Umfang besteht aus 5 mm dickem Kunststoff der Dichte ρ = 0.72 g/cm³. Wie viel wiegt der Ball? *Erinnerung: Masse = Volumen × Dichte. Die Masse der Luft darf vernachlässigt werden – sie macht je nach Luftdruck etwa 4-5g aus.*

Ball besteht aus zwei geschachtelten Kugeln K_1 (aussen) und K_2 (innen).

Radien:
- $U_1 = 76 = 2\pi \cdot r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{76}{2\pi} = 12.1$
- $r_2 = r_1 - 0.5 = 11.6$

Volumen: $V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (r_1^3 - r_2^3) = 881.80\text{cm}^3$

Masse: $M = V \cdot \rho = 0.72 = 634.90$ g

Aufgabe 12: Ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 216° und dem Radius 12 cm wird zu einer kegelförmigen Tüte gebogen. Berechne das Volumen dieser Tüte. Umfang des Kreissektors = Umfang der Grundfläche. Also $U = 2 \cdot 12 \cdot \pi \cdot \frac{216}{360} = \frac{72}{5}\pi \approx 45.2389$

Radius der Grundfläche: $r = \frac{U}{2\pi} = 7.2$

Inhalt der Grundfläche: $G = \pi r^2 = 162.86$

Höhe (Pythagoras mit Radius und Mantellinie): $h = \sqrt{m^2 - r^2} = 9.6$

Volumen: $V = \frac{1}{3} G h = 521.15$

Aufgabe 13: Wie lang ist ein 1.76 kg schwerer Kupferdraht mit dem Durchmesser 2.4 mm (Dichte des Kupfers: ρ = 8.9 kg/dm³)?

Kupferdraht ist ein Zylinder. $V = \frac{M}{\rho} = \frac{1.76 \text{ kg}}{8.9 \text{ kg/dm}^3} = 0.197752 \text{ dm}^3 = 197752 \text{ mm}^3$

Grundfläche: $G = \pi \cdot \left(\frac{2.4}{2} \text{ mm}\right)^2 = 4.5239 \text{ mm}^2$ (Achtung: 2.4 ist Durchmesser, nicht Radius)

Länge: $l = \frac{V}{G} = 43713 \text{ mm} = 43.712 \text{ m}$

Aufgabe 14: Ein Kegel hat den Grundkreisradius r = 3 cm und die Höhe h = 10 cm.

a) Berechne den Öffnungswinkel des Kegels, d.h. den Winkel zwischen zwei gegenüberliegenden Mantellinien. $\alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{h}\right) = 33.40°$

b) Berechne den Zentriwinkel des abgewickelten Kegelmantels.

   Mantellinie $m = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{109} \approx 10.44$

   $U = 2\pi r \overset{!}{=} 2\pi m \cdot \frac{\beta}{360°}$, also $\beta = \frac{r}{m} \cdot 360° = 103.45°$