6.3 Logarithmen

Einfache Exponentialgleichungen

Zu **66** bis **69**: Löse die Gleichung ohne Taschenrechner.

66 a) $2^x = 1$ b) $2^x = \frac{1}{2}$ c) $2^x = \frac{1}{32}$ d) $2^x = \frac{1}{512}$ e) $2^x = 0$

67 a) $2^x = 2^{2x-3}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3x} = 2$ c) $0.1^x = 1000$ d) $5^{2x-1} \cdot 5^{3x+5} = 5^{4x-2}$

68 a) $2^{3x} \cdot (\frac{1}{2})^{x-1} = 8$ b) $2^{3x-4} \cdot 4^{2x-3} = 8^{x+2}$

69 a) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 96$ b) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

Der Begriff des Logarithmus

Der *Logarithmus zur Basis a von b* ist definiert als jener *Exponent* x, mit dem a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Notation: $\log_a b$. Algebraisch formuliert:

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ und } b \in \mathbb{R}^+$$

Hinweise:

- Im Ausdruck $\log_a b$ wird b mit *Numerus* bezeichnet. Der Klarheit halber wird $\log_a b$ oft als $\log_a(b)$ notiert.
- $x = \log_a b$ ist die Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$.
- $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$ bedeutet, dass jede positive Zahl b mit einem Logarithmus als Potenz zur Basis a notiert werden kann: $b = a^{(\log_a b)}$.
- Der Logarithmus liefert neben der Wurzel die zweite Umkehrung des Potenzierens.
- Das Wort «Logarithmus» wurde von John Napier (Schottland, 1550–1617) geprägt aus griech. «logos» für Sinn, Rechnung, Verhältnis und griech. «arithmos» für Zahl.

70 Schreibe den Exponenten x als Logarithmus.

a) $7^x = 5$ b) $p^x = q$ c) $a^x = \frac{p}{q}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c$

71 Schreibe die Gleichung als Exponentialgleichung.

a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log_5 125 = 3$ c) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$ d) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

72 Schreibe x als Logarithmus.

a) $3^{2x} = 5$ b) $4^{\frac{x}{2}} = 3$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} = c$ d) $(2 \cdot 3)^{3x} = 36$

73 Notiere die Gleichung als Exponentialgleichung.

a) $x = \log_u v$ b) $x = \log_2 12$ c) $y = \log_{\sqrt{2}}(x)$ d) $z = \log_c \left(\frac{2}{d}\right)$

Aus der Definition von $\log_a b$ folgt:

$$a^{(\log_a b)} = b; \quad \log_a (a^x) = x; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0$$

Für häufig verwendete Logarithmenbasen gelten spezielle Notationen.

Logarithmenbasis	Notation	Name
$a = 10$	$\lg b = \log_{10} b$	Zehnerlogarithmus
$a = \mathrm{e} = 2.718281828\ldots$	$\ln b = \log_{\mathrm{e}} b$	natürlicher Logarithmus
$a = 2$	$\mathrm{lb}\, b = \log_2 b$	Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus)

Zu **74** bis **84**: Berechne ohne Taschenrechner.

74 a) $\log_3 81$ b) $\log_5 1$ c) $\log_{12} 144$ d) $\log_4 64$

e) $\log_7 343$ f) $\log_{11}\left(\frac{1}{121}\right)$ g) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right)$ h) $\log_3\left(\frac{1}{729}\right)$

75 a) $\mathrm{lb}\, 8$ b) $\mathrm{lb}\, 32$ c) $\mathrm{lb}\, 1024$ d) $\mathrm{lb}\, \frac{1}{4}$

e) $\mathrm{lb}\, \frac{1}{2048}$ f) $\mathrm{lb}\, 0.125$ g) $\mathrm{lb}\, (8^{12})$ h) $\mathrm{lb}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{4.5}\right)$

76 a) $\lg 10'000$ b) $\lg (10^{12})$ c) $\lg 0.0001$ d) $\lg (100^7)$

77 a) $\ln (\mathrm{e}^2)$ b) $\ln \frac{1}{\mathrm{e}}$ c) $\ln \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$ d) $\ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^2}\right)$

78 a) $\ln \sqrt{\mathrm{e}}$ b) $\ln \frac{1}{\mathrm{e}^3}$ c) $\ln \frac{\mathrm{e}}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}$ d) $\ln (\ln \mathrm{e})$

79 a) $\log_{\frac{1}{2}}(8)$ b) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9}\right)$ c) $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{27}{64}\right)$ d) $\log_{0.25}(0.125)$

80 a) $\log_a a$ b) $\log_a 1$ c) $\log_a (a^3)$ d) $\log_a \frac{1}{a^2}$

81 a) $(\log_a a)^a$ b) $(\log_a 1)^a$ c) $(\log_a a)^3$ d) $\left(\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right)\right)^0$

82 a) $25^{\log_5 6}$ b) $9^{\log_3 \sqrt{5}}$ c) $2^{0.5\cdot\log_2 10}$ d) $2^{-\log_8 125}$

83 a) $e^{\ln 4}$ b) $e^{2\ln 4}$ c) $e^{-\ln 4}$ d) $e^{1.5\ln 4}$

84 a) $e^{\ln(2^2)}$ b) $\left(e^2\right)^{\ln 4}$ c) $e^{-2\ln 2}$ d) $\left(e^{\ln 4}\right)^{1.5}$

Zu **85** bis **89**: Berechne x ohne Taschenrechner.

85 a) $\log_x 64 = 3$ b) $\log_x 1024 = 10$ c) $\log_x 8 = -3$ d) $\log_x \frac{1}{27} = 9$

86 a) $\log_x 1 = 0$ b) $\log_x 2 = 0$ c) $\log_x 10'000 = 2$ d) $\log_x 10 = -\frac{1}{2}$

87 a) $e^{\ln x} = x$ b) $\ln\left(e^x\right) = x$ c) $e^{-\ln x} = 3$ d) $\ln(\ln x) = 1$

88 a) $\lg\left(x^2\right) = 2$ b) $\lg\left(x^2\right) = -2$ c) $\lg\left(\lg\left(x^2\right)\right) = 1$ d) $\lg\left(\lg\left(x^2\right)\right) = 0$

89 a) $10^{2\lg x} = 25$ b) $10^{1+\lg x} = x+1$

Logarithmusfunktionen

Eine Funktion f mit der Vorschrift $f: x \mapsto y = \log_a x$, wobei $a > 1$ oder $0 < a < 1$, heisst *Logarithmusfunktion*. Die Notation ist: $y = f(x) = \log_a x = \log_a(x)$. Es gilt:

- $D = \mathbb{R}^+$; $W = \mathbb{R}$, d. h., $\log_a x$ ist nur für $x > 0$ definiert.
- Da $\log_a(1) = 0$ ist, verläuft der Graph von $y = \log_a x$ stets durch den Punkt $(1|0)$.
- Der Graph von $y = \log_a x$ ist:
  für $a > 1$ streng monoton steigend, d. h. $u < v \Leftrightarrow \log_a u < \log_a v$ und
  für $0 < a < 1$ streng monoton fallend, d. h. $u < v \Leftrightarrow \log_a u > \log_a v$.
- Für $a > 1$ kommt der Graph von $y = \log_a x$ der y-Achse für $x \longrightarrow 0$ beliebig nahe, d. h., die y-Achse ist Asymptote. Auch für $0 < a < 1$ kommt der Graph von $y = \log_a x$ der y-Achse für $x \longrightarrow 0$ beliebig nahe, d. h., die y-Achse ist Asymptote.
- Die Graphen von $y = \log_a x$ und $y = -\log_a x$ sind symmetrisch bez. der x-Achse.
- Die Logarithmusfunktion $x \mapsto y = \log_a x$ ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion $x \mapsto y = a^x$. Es gilt somit:

$$\log_a\left(a^x\right) = x; \quad a^{\log_a(x)} = x \quad \text{bzw.} \quad \log_a\left(\exp_a(x)\right) = x; \quad \exp_a\left(\log_a(x)\right) = x.$$

Hinweis: Eine Funktion f mit der Vorschrift $f: x \mapsto y = c\cdot\log_a x + b$ mit $c, b \in \mathbb{R}$ wird oft auch als Logarithmusfunktion bezeichnet.

90 Zeichne die Kurven zu f und g in das gleiche Koordinatensystem. ($1 \mathrel{\widehat{=}} 2$ Häuschen, $-3 \le x \le 3$)

a) $f: y = 2^x$; $g: y = \log_2 x$ b) $f: y = e^x$; $g: y = \ln x$

91 Zeichne die Logarithmuskurven von $y = \log_a x$ für $a = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ im gleichen Koordinatensystem ($1 \mathrel{\widehat{=}} 4$ Häuschen, $0 < x \le 8$).

92 Der Punkt P liegt auf dem Funktionsgraphen von $f: y = \log_a(x)$. Berechne a.

a) $P(9|2)$ b) $P\left(4\middle|\frac{1}{2}\right)$ c) $P\left(\frac{1}{8}\middle|-\frac{3}{4}\right)$ d) $P(2|-5)$

93 Gib die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion an.

a) $y = 10^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $x \mapsto 2^{3x}$ d) $y = \log_5\left(\sqrt{x}\right)$

94 Gib den Definitions- und Wertebereich von f an und zeichne den Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem ($1 \mathrel{\widehat{=}} 2$ Häuschen).

a) $f: y = \ln x$ b) $f: y = |\ln x|$ c) $f: y = \ln|x|$ d) $f: y = \ln(-x)$

95 Zeichne im gleichen Koordinatensystem ($1 \mathrel{\widehat{=}} 2$ Häuschen) die Graphen von $f: y = \log_2 x$, $g: y = -\log_2 x$ und $i: y = -\log_2(-x)$. Entscheide, ob sich die Kurve von f durch eine Spiegelung an der x-Achse, an der y-Achse oder am Ursprung

a) auf die Kurve von g abbilden lässt. b) auf die Kurve von i abbilden lässt.

96 Die Wertetabelle gehört zu einer Logarithmusfunktion. Wie lautet die Funktionsgleichung?

a)

x	1	3	9	243
$f(x)$	0	1	2	5

b)

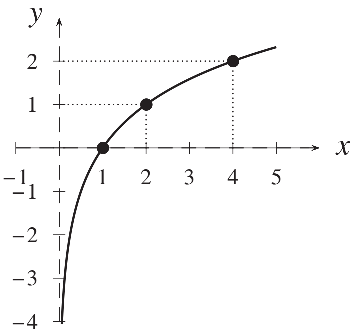
x	$\frac{1}{8}$	2	16	32
$f(x)$	3	−1	−4	−5

c)

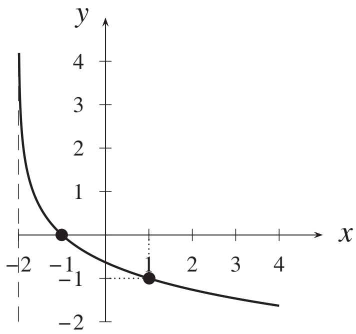
x	2	12	72	432
$f(x)$	1	2	3	4

97 Gib die Gleichung der Logarithmuskurve an (gestrichelte Geraden sind Asymptoten).

a)



b)



98 Gegeben sind $f(x) = \lg(x)$ und $g(x) = 10x$. Berechne für $\Delta x = 1$ an den Stellen $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ die durchschnittliche Steigung und kommentiere dein Ergebnis.

99 $f\colon\ y = \log_a x$ wächst für $a > 1$ langsamer als jede Potenzfunktion $g\colon\ y = x^k$ mit $k > 0$. Das bedeutet: Für eine gegebene Basis a gibt es für jeden noch so kleinen Wert von k immer eine Stelle x_0, ab der der Graph von f stets unterhalb des Graphen von g verläuft.

a) Zeichne im Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Graphen zu $f(x) = \lg x$ und $g(x) = 0.1 \cdot x$ für $0 < x \leq 15$. Ab welcher Stelle gilt stets $0.1 \cdot x > \lg x$?

b) Illustriere im Koordinatensystem auf der y-Achse mit einer Einheit von 1 cm die Funktionswerte von $f\colon\ y = \lg x$ an den Stellen $x = 1$ km (10^5 Einheiten), $x = 1000$ km (10^8 Einheiten) und $x = 100'000$ km (10^{10} Einheiten).
Zum Vergleich: Der Erdumfang am Äquator beträgt rund 40'000 km.

100 Zeichne die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $]0, 10]$ ins gleiche Koordinatensystem. Zeichne danach in dasselbe Koordinatensystem die Superposition (Überlagerung) $f(x) + g(x)$ durch Addition der Funktionswerte ein.

a) $f(x) = x;\ g(x) = \lg x$ b) $f(x) = x;\ g(x) = \lg\left(\frac{x}{10}\right)$ c) $f(x) = \frac{x}{10};\ g(x) = \lg x$

Logarithmengesetze

Für jede Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sowie $u, v \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

I $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

II $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

III $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$ mit dem Spezialfall $\log_a\left(\dfrac{1}{u}\right) = \log_a\left(u^{-1}\right) = -\log_a(u)$

Beachte: $\log_a(u+v) \neq \log_a(u) + \log_a(v)$, denn der Logarithmus reduziert die Operationsstufe.

Zu **101** bis **105**: Zerlege den Term unter Zuhilfenahme der Logarithmengesetze so weit wie möglich. Auf das Notieren der Logarithmenbasis wird hier einfachheitshalber verzichtet.

101 a) $\log(bc)$ b) $\log(pqr)$ c) $\log\frac{b}{c}$ d) $\log\frac{1}{m}$

102 a) $\log\dfrac{bc}{d}$ b) $\log\dfrac{e}{fg}$ c) $\log\dfrac{pqr}{st}$ d) $\log\dfrac{b}{c+d}$

103 a) $\log\left(b^3\right)$ b) $\log\left(m^7\right)$ c) $\log\left(b^{-5}\right)$ d) $\log\left(r^{\frac{4}{5}}\right)$

104 a) $\log\dfrac{1}{c^2}$ b) $\log\sqrt{s}$ c) $\log\sqrt[3]{b}$ d) $\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}$

105 a) $\log\left(b^3 d^5\right)$ b) $\log\dfrac{12bd^n}{5cf^r}$ c) $\log\dfrac{5c^4}{8d^6}$ d) $\log\left((x-4)^5\right)$

Zu **106** bis **111**: Drücke durch einen einzigen Logarithmus aus und vereinfache diesen so weit wie möglich. Auf das Notieren der Logarithmenbasis wird verzichtet.

106 a) $\log 2 + \log 7 - \log 14$ b) $\frac{1}{3}\log 8 - \log 2$

c) $3 \cdot \log 25 - 2 \cdot \log 125$ d) $\log 3 - 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 4$

107 a) $\log m + \log n$ b) $\log m - \log n$ c) $3\log m$ d) $\frac{1}{2}\log m$

108 a) $\log\left(m^2\right) - \log\left(m\right)$ b) $\log\left(x^3\right) - 3\log\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\log\left(\frac{1}{y^3}\right) - \log\left(\frac{1}{y^4}\right)$ d) $\dfrac{\log\left(a^5\right)}{\log\left(a^4\right)}$

109 a) $\log b + \log c - \log d - \log e$ b) $3\log b + 2\log c - 4\log d$

110 a) $-\log x - \log y - \log z$ b) $\frac{1}{4}\log\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\log y + 3\log z$

111 a) $2\log x + 3\log y - 5(\log u + \log v)$ b) $\log\left(a^{\frac{1}{4}}\right) + \log\left(a^{\frac{3}{2}}\right) - \log\sqrt{a}$

112 Richtig oder falsch?

a) $\log_a(u+2) = \log_a(u) + \log_a(2)$ b) $\log_a(3 \cdot v) = \log_a(3) \cdot \log_a(v)$

c) $\log_a(u+u) = \log_a(2) + \log_a(u)$ d) $\log_a(u-4) = \dfrac{\log_a(u)}{\log_a(4)}$

e) $\log_a\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\log_a(2)}{\log_a(3)}$ f) $\log_a(3 \cdot u) = 3 \cdot \log_a(u)$

113 Ordne die Werte $a = 2 \cdot \ln(3)$; $b = 3 \cdot \ln(2)$; $c = \ln(3) + \ln(4)$ und $d = \ln(10) - \ln(2)$ der Grösse nach aufsteigend. Arbeite ohne Taschenrechner.

114 Gegeben sind $\lg(x) = \frac{5}{2}$ und $\lg(y) = \frac{3}{2}$. Berechne ohne Taschenrechner

a) das Produkt xy. b) den Quotienten $\frac{x}{y}$.

115 Gegeben ist $\lg\left(\sqrt{2018} + \sqrt{2008}\right) = a$. Berechne $\lg\left(\sqrt{2018} - \sqrt{2008}\right)$.

116 Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen und vereinfache.

a) $\lg\left(\frac{1}{2}\right) + \lg\left(\frac{2}{3}\right) + \lg\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \lg\left(\frac{99}{100}\right)$

b) $\lg(10) + \lg\left(10^2\right) + \lg\left(10^3\right) + \ldots + \lg\left(10^{100}\right)$

c) $\ln(3) + \ln(3) - 3$

d) $\ln\left(\ln\left(e^{\sqrt{e^3}}\right)\right)$

e) $\ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(4) + \ln(5) - \ln(6) + \ln(7) - \ln(8) + \ln(9) - \ln(10)$

Logarithmusgleichung

Die Logarithmusgleichung $\log_a x = b$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}$) besitzt die positive Lösung $x = a^b$.

Zu **117** bis **120**: Löse die Logarithmusgleichung ohne Taschenrechner.

117 a) $\log_2 x = 10$ b) $\lg(x) = -3$ c) $\ln(x) = \lg(100)$ d) $\log_a(x^2) = 2$

118 a) $\ln(x) + \ln\left(x^2\right) + \ln\left(x^3\right) + \ln\left(x^4\right) = 5$ b) $\log_7\left(x^2\right) + \log_7\left(-x^3\right) = 10$

c) $\operatorname{lb}(30 - 4x) - \operatorname{lb}(x) = \operatorname{lb}(6 - x) + 1$ d) $\log_3(x) = 2 + \log_3(x + 2) - \log_3(x + 16)$

119 a) $\frac{1}{2}\ln(x + 4) + \ln\left(\frac{e^3}{4}\right) = 3 + \frac{\ln(x+1)}{2}$ b) $\lg\left(\frac{3}{2}\right) + \lg\left(\frac{4}{3}\right) + \lg\left(\frac{5}{4}\right) + \ldots + \lg\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2$

120 a) $\frac{\ln(x)-1}{2\ln(x)+1} = 3$ b) $(\ln(x) + 2)(3 - \ln(x)) = (\ln(x) + 6)(2 - \ln(x))$

c) $\lg^2(x) - \lg(x) - 56 = 0$ d) $5\lg(x) - \frac{9}{\lg(x)} - 12 = 0$

121 Ist die Gleichung korrekt gelöst worden? Begründe.

a) $2\lg(x) = 2$, d. h. $\lg(x) = 1$, also $x = 10$.

b) $2\lg(x) = 2$, d. h. $\lg(x^2) = 2$, also $x^2 = 100$, d. h. $x = \pm 10$.

c) $\lg\left(x^2\right) = (\lg(x))^2$, d. h. $2\lg(x) = (\lg(x))^2$, also $2 = \lg(x)$, d. h. $x = 100$.

Basiswechsel

Für den Wechsel der Logarithmenbasis gilt: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ mit $a, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$.

Speziell gilt: $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\operatorname{lb} b}{\operatorname{lb} a}$.

Zu **122** bis **126**: Verwende einen Basiswechsel.

122 Schreibe um zu Logarithmen zur Basis 10.

a) $\log_{100} 1000$ b) $\log_{0.1} 10$ c) $\log_2 5$ d) $\log_3\left(|x|^{10}\right)$

123 Vereinfache zu einem einzigen Logarithmus.

a) $\dfrac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}$ b) $\dfrac{\ln 7}{\ln 10}$ c) $\dfrac{\ln 64}{\ln \sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\ln 125}{\ln 8}$

124 Vereinfache.

a) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 9$ b) $\dfrac{\log_3 13 \cdot \log_5 17}{\log_3 289 \cdot \log_5 169}$ c) $\dfrac{\log_3 125 \cdot \log_2 \sqrt[3]{3}}{\log_8 5}$

125 Mario vereinfacht $\log_{a^n}(x^n)$ durch «Kürzen» zu $\log_a(x)$. Ist das korrekt? Begründe.

126 a) Ein CAS-Taschenrechner vereinfacht den Term $\log_a b \cdot \log_b a$ zu 1. Begründe.

b) Zeige mit a), dass $\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a}$ gilt.

Zu **127** bis **129**: Löse die Logarithmusgleichung nach x auf. Verwende einen Basiswechsel.

127 a) $\log_4 9 = \log_2 x$ b) $\log_3 16 = \log_x 256$

c) $2^{\log_4 x} = 7$ d) $\log_4(\log_2 x - 1) = \log_{16} 9$

128 a) $\log_3(x-2) = \log_9 x$ b) $\log_x(7^3) - \log_7 x = 2$

129 a) $\log_3(x-5) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4x-15}$

b) $\log_{\sqrt{2}}(x) \cdot \log_2(x) \cdot \log_{2\sqrt{2}}(x) \cdot \log_4(x) = 54$

Zu **130** und **131**: Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung?

130 a) $2^n > 10^{12}$ b) $0.9^n < 0.01$

c) $7 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 10^{-3}$ d) $1 - \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^n > 0.9$

131 a) $3^n < 2^{1000} < 3^{n+1}$ b) $10^n < \mathrm{e}^{400} < 10.5^n$

c) $\mathrm{e}^n < \left(7^7\right)^7 < 10^n$ d) $3^n < 7^{(7^7)} < 5^n$

Zu **132** bis **139**: Löse die Exponentialgleichung auf 4 wesentliche Ziffern genau.

132 a) $2^x = 11$ b) $\mathrm{e}^x = \pi$ c) $0.8^x = 0.005$

133 a) $\mathrm{e}^{-x} = 100$ b) $\mathrm{e}^{2x-5} = 3$ c) $10^{\frac{x}{x+1}} = 0.8$

134 a) $10^6 \cdot 0.9^x = \mathrm{e}$ b) $5 \cdot 4^{2x+1} = 26$ c) $5^x = 2 \cdot 7^{x+1}$

135 a) $5 \cdot 6^{2x} = 6 \cdot 5^{2x}$ b) $3^{2x} = 4 \cdot 5^{x+3}$ c) $x^{\lg x} = 10^4$

136 Verwende eine Faktorzerlegung.

a) $3 \cdot 4^x + 5 = 6 \cdot 4^x - 19$ b) $2^{x-3} + 2^{x+1} = 17$ c) $9^{x+\frac{1}{2}} - 9^x = 9^{x-\frac{1}{2}} + 135$

137 Verwende eine Faktorzerlegung.

a) $5^{x-1} + 6^x = 6^{x+1} - 5^x$ b) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$ c) $5^{3x+1} - 5^{3x-1} = 48$

138 Verwende eine geeignete Substitution.

a) $10^x + 10^{2x} = 600$ b) $2^x + 3 = 4^x$ c) $\mathrm{e}^x = 1 + \mathrm{e}^{-x}$

139 Verwende eine geeignete Substitution.

a) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$ b) $6^{1+x} + 6^{1-x} = 13$ c) $25^x - 15 \cdot 5^{x-1} = 5^x + 5$

140 Die Einwohnerzahl von Afrika nahm von 2015 bis 2020 jährlich um 2.5 % zu. In der Mitte des Jahres 2020 betrug sie 1.3 Milliarden.

a) Wie gross war die Einwohnerzahl Mitte 2015?

b) In welchem Jahr wird die Einwohnerzahl bei unveränderter Wachstumsrate die Zweimilliardengrenze überschreiten?

c) Wie gross ist die Verdoppelungszeit bei unveränderter Wachstumsrate?

141 Bei einer aussterbenden Krankheit nimmt die Anzahl der Todesfälle exponentiell mit der Zeit ab. Im Jahr 1922 starben 192 Personen, im Jahr 1929 noch 127 Personen an dieser Krankheit.

a) Wie viele Personen starben im Jahr 1935 an dieser Krankheit?

b) Wie gross ist die Halbwertszeit?

c) Von welchem Jahr an gibt es keine Todesfälle mehr (d. h. weniger als 0.5 Todesfälle)?

d) Wie gross ist die jährliche prozentuale Abnahme der Todesfälle?

142 Die Bevölkerungszahl eines Staates A betrug am 1. Januar 2015 23'560'000 und nimmt jährlich um 1.23 % zu. Die Bevölkerungszahl eines Staates B betrug am 1. Januar 2018 29'273'000 und nimmt jährlich um 0.73 % ab. Wann (Jahr, Monat) werden diese Staaten dieselbe Bevölkerungszahl haben?

143 a) Gegeben ist $f(t) = a \cdot b^t$ mit $b > 1$.
Drücke die Verdoppelungszeit t_d durch $a,\ b$ und t aus. Kommentar?

b) Gegeben ist $f(t) = a \cdot b^t$ mit $0 < b < 1$.
Drücke die Halbwertszeit t_h durch $a,\ b$ und t aus. Kommentar?

Berechnen von Logarithmen

144 Gegeben sind $\lg(2) = 0.30103$, $\lg(3) = 0.47712$ und $\lg(7) = 0.84510$.

a) Berechne ohne TR die Zehnerlogarithmen der übrigen ganzen Zahlen von 1 bis 10.

b) Berechne mit den Werten aus a) die Werte $\lg(60)$, $\lg(126)$ und $\lg(144)$.

c) Berechne mit den Werten aus a) die Werte $\lg\sqrt{6}$, $\lg\sqrt{35}$ und $\lg\sqrt{1024}$.

145 Welche Zahl ist grösser?

a) $2^{20'000}$ oder $3^{13'000}$

b) $0.9^{30'000}$ oder $0.8^{15'000}$

146 Gib die erste Ziffer, die letzte Ziffer und die Anzahl der Ziffern von dem im Zehnersystem geschriebenen ausgerechneten Wert an.

a) 837^{837}

b) $6^{(7^8)}$

c) $1003^{350} \cdot 1004^{340} \cdot 1008^{320}$

147 Wie viele Ziffern besitzt der im Zehnersystem geschriebene ausgerechnete Wert? Wie heisst die erste dieser Ziffern? Wie viele aufeinander folgende Nullen kommen am Ende vor?

a) $432^{100} \cdot 1250^{500}$

b) $250^{50} \cdot 200^{600}$

148 *Logarithmentafel I*: Berechne mit der folgenden «Logarithmentafel zur Basis 2» die nachfolgenden Werte.

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$\log_2 x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

a) $8 \cdot 64$

b) $32 \cdot 128$

c) $512 : 64$

d) $4096 : 128$

e) 4^4

f) 16^3

g) $\sqrt[3]{512}$

h) $\sqrt[6]{4096}$

149 *Logarithmentafel II*: Im Jahr 1620 publizierte der Schweizer Jost Bürgi (Uhrmacher, Astronom und Mathematiker, geb. 1552 in Lichtensteig im Toggenburg, gest. 1632 in Kassel) seine Logarithmentafel. Die x-Werte weisen eine relativ kleine Schrittweite auf. Bürgi nannte die x-Werte «schwarze Zahlen» und die $\log_a x$-Werte «rote Zahlen». In der Zeile mit den schwarzen Zahlen entsteht ein Eintrag aus dem vorhergehenden jeweils durch Multiplikation mit dem Faktor 1.0001 und in der Zeile mit den roten Zahlen entsteht ein Eintrag aus dem vorhergehenden jeweils durch Addition des Summanden 0.0001.

x	1.00000000	1.0001000	1.00020001	...	x_1	...	1.0001^n
$\log_a x$	0.00000	0.00010	0.00020	...	0.10000	...	y

a) Berechne den fehlenden Wert x_1 (8 Ziffern nach dem Dezimalpunkt).

b) Gib den Term für y an.

c) Welche Basis a benützte Bürgi? Um wie viel Prozent ist a kleiner als die Euler'sche Zahl e?

Vermischte Aufgaben

150 Beweise, dass die folgenden Logarithmenwerte irrational sind. Tipp: Nimm an, die Werte seien rational und führe diese Annahme zu einem Widerspruch.

a) $\lg 2$ b) $\log_5 2$ c) $\log_a(b)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$

151 In der Homöopathie werden Patienten u. a. mit stark verdünnten Substanzen behandelt. Eine Ausgangssubstanz wird mit Wasser um das 100-fache verdünnt (Verhältnis 1 : 100) und geschüttelt, dann wird die verdünnte Substanz wieder mit Wasser um das 100-fache verdünnt und geschüttelt usw. Wie viele Verdünnungsschritte mit dem Faktor 100 sind nötig, bis aus einer Ausgangssubstanz mit 10^{22} Molekülen alle bis auf eines durch Wassermoleküle ersetzt sind?

152 a) Untersuche für $n = 10, 100, 1000, 10'000, 100'000$ den Zusammenhang zwischen $\lg n$ und der Anzahl Stellen von n und leite daraus eine Formel für die Anzahl Stellen einer beliebigen natürlichen Zahl n ab.

b) Untersuche für $n = 2, 4, 8, 16, 32$ den Zusammenhang zwischen $\mathrm{lb}\, n$ und der Anzahl Stellen von n im Binärsystem. Leite daraus eine Formel für die Anzahl Stellen einer beliebigen natürlichen Zahl n im Binärsystem ab.

c) Finde eine Formel für die Anzahl Stellen einer beliebigen natürlichen Zahl n im Stellenwertsystem mit Basis a.

153 Gegeben sind zwei Exponentialfunktionen $f: x \mapsto ab^x$ und $g: x \mapsto cd^x$ mit $a, b, c, d > 0$ und $b, d \neq 1$. Zeige, dass die Punkte $(f(x)|g(x))$ auf dem Graphen einer Potenzfunktion $p \cdot x^q$ liegen. Wie hängen p und q von a, b, c, d ab?

154 Gib die Definitionsmenge der Funktion f an.

a) $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x\right)$ b) $f(x) = \lg\left(\log_7 x\right)$

155 Zeige: $y = a^x$ und $y = c \cdot a^x$ sind zueinander kongruente Kurven.

156 Zeige: $y = a^x$ und $y = b^x$ lassen sich durch eine horizontale Streckung an der y-Achse in x-Richtung ineinander überführen.

157 Für welche Werte von a, b, c mit $a > 1$ gibt es eine Funktion $y = \log_a(bx + c)$, deren Graph durch die Punkte $(2|2)$, $(-1|0)$ und $(0|1)$ verläuft?

158 Löse die Formel ohne Taschenrechner nach jeder Variablen auf.

a) $N = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$ b) $m_1 - m_2 = -2.5 \lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

c) $I = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$ d) $\frac{T_a}{T_e} = \left(\frac{V_e}{V_a}\right)^{\kappa - 1}$

159 Entscheide, ob die Kurve f durch eine Streckung an der x- oder y-Achse in die Kurve g übergeführt wird. Gib gegebenenfalls den Streckfaktor an.

a) $f: y = \log_2 x$; $g: y = \log_4 x$ b) $f: y = \log_4 x$; $g: y = \log_8 x$

160 Die Zahl 2018^{-2018} ist eine sehr kleine Zahl. Wie lauten die ersten drei von Null verschiedenen Nachkommaziffern?

Zu **161** bis **163**: Die meisten Logarithmen sind irrational und können daher nur näherungsweise berechnet werden. Die folgende Methode zur Berechnung beliebiger Logarithmen kann auf einem Computer programmiert werden.

Beispiel: Vorgehen zur Berechnung von $x = \log_2(11)$

- Schreibe $x = \log_2(11)$ in eine *Exponentialgleichung* um: $2^x = 11$.
- Berechne den *ganzzahligen* Teil von x: Dividiere dazu den Numerus 11 fortgesetzt durch die Basis 2, bis das Resultat kleiner als die Basis 2 ist.
  Nach 3 Divisionen ist: $\frac{11}{8} = 1.375 < 2$. Der ganzzahlige Teil von x beträgt daher 3.
- Berechne die *erste Nachkommastelle* von x: Potenziere das Resultat $\frac{11}{8} = 1.375$ mit dem Exponenten 10. Das ergibt 24.156 ... Dividiere dieses Ergebnis wieder fortgesetzt durch die Basis 2, bis das Resultat kleiner als die Basis 2 ist.
  Nach 4 Divisionen ist: $1.509\ldots < 2$. Die erste Nachkommastelle von x beträgt 4.
- Berechne die *zweite Nachkommastelle* von x: Potenziere das Resultat 1.509 ... mit dem Exponenten 10. Das ergibt 61.527 ... Dividiere dieses Ergebnis wieder fortgesetzt durch die Basis 2, bis das Resultat kleiner als die Basis 2 ist.
  Nach 5 Divisionen ist: $1.922\ldots < 2$. Die zweite Nachkommastelle von x beträgt 5.
- usw. Auf 5 Nachkommastellen ergibt sich damit $x = \log_2(11) = 3.45943$.

Mit der folgenden Kurzform kann die Methode am Computer programmiert werden:

1. Schritt: Setze $b := 2; n := 11$
2. Schritt: Setze $z := 0$
3. Schritt: Solange $n \geq b$ ist, setze $n := \frac{n}{b}$ und $z := z + 1$
4. Schritt: Gib z aus, setze $n := n^{10}$ und gehe zu Schritt 2.

161 Berechne auf drei Nachkommastellen genau.

a) $\log_2 9$ b) $\log_3 30$ c) $\log_5 1.673$ d) $\log_{1.2} 10$

162 Löse die beiden Exponentialgleichungen $10^x = 2$ und $10^{\frac{1}{x}} = 2$.

163 Was passiert, wenn $\log_2(0.5)$ berechnet werden soll? Wie kann allgemein $\log_b(n)$ für $0 < n < 1$ berechnet werden?