2. Rationale Potenzen Lösungen

Selber Erforschen

Aufgabe 1:

a) Was könnte $9^{0.5}$ sein? Wir wissen, dass $9^0 = 1$ und $9^1 = 9$ ist, also ist es plausibel, dass $9^{0.5}$ irgendwo dazwischen liegt. Aber welche Zahl? Stelle eine Vermutung auf und versuche, diese Vermutung zu begründen.

b) Wenn man a^2 quadriert, so entsteht $\left(a^2\right)^2 = a^4$. Also ist a^2 die Quadratwurzel von a^4. Ändere diese Überlegung so ab, dass sie anfängt mit: "Wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ quadriert..."

c) Welche Erkenntnis bezüglich $9^{0.5}$ können wir daraus ziehen?

Aufgabe 2:

a) Welche Zahl könnte mit $7^{\frac{1}{2}}$ gemeint sein?

b) Welche Zahl könnte mit $7^{\frac{3}{2}}$ gemeint sein?

c) Welche Zahl könnte mit $7^{-\frac{3}{2}}$ gemeint sein?

Aufgabe 3: In diesem Abschnitt führen wir Potenzen mit rationalen[1] Exponenten ein. Nun, nachdem du Aufgaben 1&2 bearbeitet hast, hast du bestimmt gute Ideen dazu, wie die folgenden Definitionen zu vervollständigen sind. Bitte versuche es:

- Für irgendeine natürliche Zahl n sei $a^{\frac{1}{n}} := \boxed{}$
- Für irgendeine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ sei $a^{\frac{m}{n}} := \boxed{}$

Aufgabe 4: Die folgenden Gleichungen bauen in der Schwierigkeit aufeinander auf. Versuche nacheinander, jede zu lösen und entdecke so einen allgemeinen Lösungsweg für Exponentialgleichungen.

a) $2^x = 2^3 \Rightarrow \underline{x = 3}$

b) $2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow \underline{x = 2}$

c) $2^{x+1} = 2^{2x} \Rightarrow x + 1 = 2x \Rightarrow \underline{x = 1}$

d) $2^{x+1} = 4^x \Rightarrow 2^{x+1} = \left(2^2\right)^x \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{2x} \Rightarrow$ siehe c)

e) $8^{x+1} = 4^x \Rightarrow \left(2^3\right)^{x+1} = \left(2^2\right)^x \Rightarrow 2^{3x+3} = 2^{2x} \Rightarrow 3x + 3 = 2x \Rightarrow \underline{x = -3}$

f) $8 \cdot 8^x = 4^x \Rightarrow 2^3 \cdot 2^{3x} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{3x+3} = 2^{2x} \Rightarrow$ siehe e)

g) $4 \cdot 8^x = \frac{4^x}{16} \Rightarrow 2^{2+3x} = 2^{2x-4} \Rightarrow 2 + 3x = 2x - 4 \Rightarrow \underline{x = -2}$

[1] d.h. Bruchzahlen

Selber Erklären

Aufgabe 5: Überlege dir nochmals genau, warum wir $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ definiert haben. Mache dann mit deinem Platznachbarn ein kleines Rollenspiel: Eine Person spielt einen Schüler, der diese Definition nicht versteht oder noch nicht kennt, die andere Person versucht, es zu erklären. Die erste Person sollte nachfragen, bis es klar ist. Wechselt dann die Rollen.

Aufgabe 6: Hugo vermutet Folgendes: Wenn man zuerst die dritte Wurzel einer Zahl a zieht und danach vom Ergebnis noch die Quadratwurzel, so erhält man am Ende die fünfte Wurzel von a. Zeige, dass Huge sich irrt, indem du die Potenzgesetze anwendest. Wie muss Hugos Vermutung korrigiert werden?

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{P3}}{=} a^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

Man muss also die Exponenten multiplizieren.

Aufgabe 7: Alice multipliziert die 3. Wurzel von a mit der 5. Wurzel von a. Ist es zutreffend, dass sie dann die 8. Wurzel von a erhält? Begründe deine Antwort gut mithilfe der neu gelernten Gesetze.

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \overset{\text{P1}}{=} a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{8}{15}} = \left(\sqrt[15]{a}\right)^8$$

Es stimmt nicht, da $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq \frac{1}{8}$

Aufgabe 8: Kannst du durch schrittweises gut begründetes Umformen zeigen, dass

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{60}}}}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

ist? Schritt für Schritt jeweils die innerste Wurzel als Potenz auffassen:

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{60}}}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{30}}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2^{10}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Üben und Anwenden

Aufgabe 9: Berechne ohne TR:

a) $\sqrt[10]{10^{-10}} = 10^{-\frac{10}{10}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

b) $\sqrt[6]{9^3} = 9^{\frac{3}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$ Primfaktorzerlegung: $128 = 2^7$. Also: $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \left(2^{-7}\right)^{\frac{1}{7}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{8 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-1} = 0.2$

Aufgabe 10: Vereinfache soweit wie möglich:

a) $a^{-6} : a^{-2} = a^{-4}$ bzw $\frac{1}{a^4}$ (beides ok)

b) $\left(a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{5}}\right) \cdot a^{\frac{1}{10}} = a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = a^{\frac{3}{20}}$ bzw $\sqrt[20]{a^3}$

c) $\left(a^2\right)^{0.2} : a^{0.2} = a^{0.4} : a^{0.2} = a^{0.4-0.2} = a^{0.2} = a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$

d) $\left[\sqrt[3]{a^2} : \left(\sqrt{a}\right)^3\right] \cdot a^{-\frac{1}{6}} = \left[a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{2}}\right] \cdot a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

e) $x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[1]{x^3}}} = x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^4}} = x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^2} = x^4 \cdot x^{\frac{4}{3}} = x^{4+\frac{4}{3}} = x^{\frac{16}{3}}$

Aufgabe 11: Das Volumenverhältnis zweier Würfel beträgt 2:1. Berechne das Verhältnis der Kantenlängen sowie das Verhältnis der Oberflächeninhalte. Seien a, b die Kantenlängen. Dann ist $V_1 = a^3$ und $V_2 = b^3$, also

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b^3} &= \frac{2}{1} \\ \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 &= 2 \\ \Rightarrow \frac{a}{b} &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

für das Kantenverhältnis und mit Quadrieren: $\frac{O_1}{O_2} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sqrt[3]{4}$ für das Oberflächenverhältnis.

Aufgabe 12: Löse die Gleichungen nach x auf:

a) $2^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-5} = 2^x \Rightarrow 2^{-15} = 2^x \Rightarrow x = \underline{\underline{-15}}$

b) $9^{50} = 27^x \Rightarrow \left(3^2\right)^{50} = \left(3^3\right)^x \Rightarrow 3^{100} = 3^{3x} \Rightarrow 100 = 3x \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{100}{3}}}$

c) $16^{-x} = 2^{10} \Rightarrow 2^{-4x} = 2^{10} \Rightarrow -4x = 10 \Rightarrow x = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$

d) $x^{0.75} = 8 \Rightarrow x^{\frac{3}{4}} = 8 \Rightarrow x = 8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = \underline{\underline{16}}$

e) $5^{2x+1} - 3125 = 0 \Rightarrow 5^{2x+1} = 3125 \overset{:5}{\Rightarrow} 5^{2x} = 625 = 5^4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \underline{\underline{2}}$

f) $\sqrt[8]{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^{\frac{4}{8}} = 3^{-x} \Rightarrow \frac{1}{2} = -x \Rightarrow x = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

Aufgabe 13: Ordne die Zahlen der Grösse nach:

a) $a = 100^{-1000}$ und $b = 10'000'000'000^{-100}$ $a = \left(10^2\right)^{-1000} = 10^{-2000}$, $b = \left(10^{10}\right)^{-100} = 10^{-1000}$. Somit ist $a < b$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, 2^{-2}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ Normalisiert man zuerst alle Zahlen in die Form 2^x, so wird die Liste zu: $2^2, 2^{-2}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}$. Nun ordnet man den Exponenten nach, also:

$$2^{-2} < 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} < 2^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

c) $(\pi^{\pi})^{\pi}, \pi^{(\pi^2)}, (\pi^{\pi})^2$ Da $\pi > 2$ und $\pi^{\pi} > 1$ ist sicherlich $(\pi^{\pi})^{\pi} > (\pi^{\pi})^2$. Laut den Potenzgesetzen ist ausserdem $(\pi^{\pi})^{\pi} = \pi^{\pi\cdot\pi} = \pi^{(\pi^2)}$. Also

$$(\pi^{\pi})^{\pi} = \pi^{(\pi^2)} > (\pi^{\pi})^2$$