Exponentialfunktionen

1. Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Beispiel 1 – *Bakterien*

Das strahlungsresistenteste Lebewesen überhaupt ist gemäss dem Guiness-Buch der Rekorde das Bakterium *Deinococcus radiodurans*. Es kann unter extremen Umweltbedingungen überleben und gedeihen. Es kommt beispielsweise in Atomreaktoren sowie auf der Aussenhülle der Internationalen Raumstation ISS vor. Unter günstigen Bedingungen wächst die Anzahl der Bakterien innerhalb einer Stunde um 40 %.

Zu Beginn der Beobachtung sind bereits 25 Millionen Bakterien vorhanden. Vervollständige die folgende Tabelle.

Zeit in Stunden	0	1	2	3	4	…	8
Bakterien in Millionen	25	35	49	68.6	96.04	…	$25\cdot(1.4)^8$

$\cdot 1.4 \quad \cdot 1.4 \quad \cdot 1.4 \quad \cdot 1.4$

Prozentuale Zunahme $\quad p =$ 40%

Wachstumsfaktor $\quad a =$ 1.4

Anfangswert $\quad b =$ 25

Kennt man den Wachstumsfaktor a und den Anfangswert b, so kann der 8. Eintrag der Tabelle wie folgt berechnet werden

8. Eintrag $= 25 \cdot (1.4)^8$

Die Anzahl Millionen Bakterien nach x Stunden wird mit folgender Wachstumsfunktion beschrieben

$$W(x) = b \cdot a^x$$

In Worten: Man rechnet den Wachstumsfaktor (1 + (Prozentuale Zunahme **/** 100)) mit der Potenz wie oft man es um den Wachstumsfaktor vergrössert. All dass Multipliziert man mit dem Anfangswert.

Für den Wachstumsfaktor a und die prozentuale Änderung p gilt der folgende Zusammenhang

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

Beispiel 2 – *Einwohnerzahl der Schweiz*

Die Schweiz hat laut Bundesamt für Statistik Ende Juni 2025 die Marke von 9 Millionen Einwohnern erreicht. Das Bevölkerungswachstum beträgt jährlich 1.0%.

a) Wie lautet der Wachstumsfaktor a?

$a = 1.01$

b) Vervollständige die Tabelle

Jahr	2023	2024	2025	2026	2027	…	2050
Einwohner in Millionen	$9\cdot(1.01)^{-2}$	$9\cdot(1.01)^{-1}$	9	9.09	$9\cdot(1.01)^{2}$	…	$9\cdot(1.01)^{25}$

$\cdot 1.01 \quad \cdot 1.01 \quad \cdot 1.01 \quad \cdot 1.01$

Wachstumsfunktion: $W(x) = 9\cdot(1.01)^x$

c) Wie viele Einwohner hatte die Schweiz im Jahr 1925? (*auf zwei Nachkommastellen gerundet*)

$9\cdot(1.01)^{-100} = W(-100) \approx 3.33$ Mio

Beispiel 3 – *Pandabären*

Die Population der Pandabären in einem Naturschutzgebiet in China beträgt aktuell 4096 Tiere. Leider nimmt die Population jedes Jahr um 12.5% ab.

a) Wie viele Pandabären leben nach 1 Jahr, 2 Jahren und 3 Jahren noch im Naturschutzgebiet?

$a = 1 - 0.125 = 0.875$

nach 1 Jahr: $4096 \cdot 0.875 = 3584$

nach 2 Jahren: $4096 \cdot (0.875)^2 = 3136$

nach 3 Jahren: $4096 \cdot (0.875)^3 = 2744$

$\cdot 0.875$

$\cdot 0.875$

Wachstumsfaktor:

b) Nach 4 Jahren wird das Naturschutzgebiet vergrössert und durch die Vergrösserung kommen k Pandabären zusätzlich zur bestehenden Population hinzu. Nach zwei weiteren Jahren besteht die Population aus 1862 Tieren. Berechne k.

Nach 4 Jahren: $2401 = 4096 \cdot (0.875)^4$

neue Pandas: K

(+)

Neuer Anfangswert $2401 + K$

Neue Wachstumsfunktion: $F(x) = (2401 + K) \cdot (0.875)^x$

$F(2) = 1862$

$(2401 + K) \cdot (0.875)^2 = 1862 \quad | :(0.875)^2$

Zugehörige Aufgaben: 79 – 82

$K = 31$

wird ausgeschlossen

Exponentielles Wachstum/Exponentieller Zerfall

$\boxed{a<0}$ $a=-2$

$(-2)^x$

$x=\frac{1}{2}$

$(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$

def nicht

Wachstumsfunktion $W(x) = b \cdot a^x$

x: Variable (Vergangene Zeit)

b: Anfangswert

$a=1$?

Exponentielles Wachstum für $a > 1$;

$W(x)=6\cdot 1^x=6$

konstante Funktion

Exponentieller Zerfall für $0 < a < 1$.

Eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = b \cdot a^x$ heisst **Exponentialfunktion**. Hierbei ist $a > 0$ mit $a \neq 1$ der **Wachstumsfaktor** und b der Funktionswert an der Stelle $x = 0$. Er wird auch **Anfangswert** genannt.

➔ Die Bedingung „*wenn sich x um 1 erhöht, soll y um p % **anwachsen**“* bedeutet:

Exponentielles Wachstum nach dem Gesetz $y = f(x) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$

Zahlenbeispiel:

Tägliche Zunahme um $p = 2.5\%$
Wachstumsfaktor $\underline{a} = 1 + \frac{2.5}{100} = 1 + 0.025 = \underline{1.025} > 1$

➔ Die Bedingung „*wenn sich x um 1 erhöht, soll y um p % **abnehmen**“* bedeutet:

Exponentieller Zerfall nach dem Gesetz $y = f(x) = b \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$

Zahlenbeispiel:

Tägliche Abnahme um $p = 2.5\%$
Wachstumsfaktor $\underline{a} = 1 - \frac{2.5}{100} = 1 - 0.025 = \underline{0.975} < 1$

Beispiel 4 – *Wertabnahme eines Computers*

Ein Computer mit dem Neuwert $5000\ Fr.$ wird nach 7 Jahren für $800\ Fr.$ verkauft. Die jährliche Wertabnahme ist exponentiell.

a) Wie viel Prozent p beträgt die jährliche Wertabnahme?

$$800 = 5000 \cdot a^7 \quad \Big| : 5000$$

$$\frac{4}{25} = a^7 \quad \Big| \sqrt[7]{}$$

$$a = \sqrt[7]{\frac{4}{25}}$$

$$p = 23\%$$

b) Wie gross wäre der Wert des Computers nach 4 Jahren gewesen?

$$5000 \cdot (a)^4 \approx 1755$$

c) Wie viel Prozent p beträgt die halbjährliche Wertabnahme?

$$W\left(\tfrac{1}{2}\right) = 5000 \cdot a^{\frac{1}{2}}$$ – Halbjähriges wachstum

$$\underline{\underline{p = 12\%}}$$

Halbwertszeit und Verdoppelungszeit

Verdoppelungszeit = Vergange Zeit bis sich der Anfangswert verdoppelt hat

Halbwertszeit = Vergange Zeit bis sich der Anfangswert halbiert hat

Beobachtung: $W(x) = 6 \cdot a^x$

Gleichung für Halbwertszeit:

$$W(x) = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$6 \cdot a^x = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^x = \frac{1}{2}$$

Gleichung für Verdoppelungszeit:

$$a^x = 2$$

Zugehörige Aufgaben: 111, 112, 122

Beispiel 5 – *Schadstoffe in einem See*

Ein durch $10t$ chemische Schadstoffe verunreinigter See kann jährlich 10% des noch vorhandenen Schadstoffes abbauen.

a) Stelle eine Formel für die vorhandene Schadstoffmenge $s(x)$ nach x Jahren auf.

$s(x) = b \cdot a^x$ $\quad$ $1 - 0.1 = 0.9$

$= 10t \cdot 0.9^x$

b) Welche Menge an Schadstoffen wird nach 10 Jahren im See noch vorhanden sein?

$= 10t \cdot 0.9^{10} = 3.49t$

c) Wenn die Schadstoffmenge im See noch 1 Prozent des Anfangswertes beträgt, dann wird der See wieder zum Baden frei gegeben. Wann wird dies der Fall sein?

$10t \cdot 0.9^x = 0.1$

$\log_{0.9}(0.01) = x = 43.71$ Jahre

$0.01 \cdot 10 = 10 \cdot (0.9)^x \quad | : 10$

$0.01 = (0.9)^x$

$x = \log_{0.9}(0.01)$

≈ 43.71

ca. nach 44 Jahren

Beispiel 6 – *Zinsrechnung*

Moritz besitzt am Ende des Jahres 2026 auf seinem Sparheft $50'000 Fr.$.
Er rechnet sich aus, dass er Ende 2036 bereits $64'000 Fr.$ haben wird, falls sich der Zinsfuss (jährliche Zunahme in Prozent) nicht ändert.

a) Wie gross ist der Zinsfuss?

$W(x) = 50'000 \cdot a^x$ $\quad x$: Jahre

$64\,000 = 50000 \cdot a^{10}$

$\frac{32}{25} = a^{10} \quad | \sqrt[10]{}$

$1.02 = a$

$p \approx 2.5\%$, $a = \sqrt[10]{\frac{32}{25}}$

b) Wie hoch ist – bei unverändertem Zinsfuss – der Stand des Sparhefts am Ende des Jahres 2031?

$50000 \cdot 1.02^5 = 56568.54$

c) Nach wie vielen Jahren wird sein Kapital auf $78'000 Fr.$ angewachsen sein?

$\log_{1.02}\left(\frac{78000}{50000}\right) = 18.01 \approx (19 \text{ Jahre})$

d) In welchem Jahr wird sich der 2026 angelegte Betrag verdoppelt haben?

$50000 \cdot 1.02^x = 100000$

$1.02^x = 2$

$\log_{1.02}(2) = x = 28.08$

K**ontrollaufgabe **1

Die Einwohnerzahl eines Staates nimmt jährlich um 5% zu und betrug am 1. Januar 2010 genau 12 Millionen.

a) Welches wird bei unveränderter Wachstumsrate die Einwohnerzahl am 1. Januar 2030 sein?

$12 \cdot (1.05)^{20} = 31.84$

b) Wie gross war die Einwohnerzahl am 1. Januar 2000?

$12 \cdot (0.95)^{10} = 7.18$

c) Ein Flüchtlingsstrom im Jahr 2014 (Annahme am 1. Januar) von k Personen aus einem anderen Staat hat zur Folge, dass die Bevölkerungszahl (trotz gleicher Wachstumsrate) bereits am 1. Januar 2020 auf 24 Millionen angewachsen ist. Berechne k. (*auf Hunderttausend genau*)

$12 \cdot (1.05)^{4} = 14.59$

$24 \cdot (0.95)^{6} = 17.64$

$17.64 - 14.59 = \underline{\underline{3.1}}$

K**ontrollaufgabe* ***2

Bei einer Bakterienkultur ohne Raum- und Nahrungsmangel wächst die Bakterienzahl mit der Zeit exponentiell an. Um 8 Uhr hat es 500 Bakterien und um 12 Uhr bereits 2000 Bakterien.

a) Wie viele Bakterien hat es um 9 Uhr? (*auf ganze Bakterien runden)*

$500 \cdot p^4 = 2000$

$p^4 = 4 \quad | \sqrt[4]{\ }$

$p = 1.41$

$500 \cdot 1.41^1 = 707.11 \approx 707$

x: Stunden

b) Wie viele Bakterien hatte es um 7 Uhr? (*auf ganze Bakterien runden)*

$500 \cdot 0.59 = 292.89 \approx 292$

Kontrollaufgabe **3**

Um wie viel Prozent nimmt der Energieverbrauch einer Stadt jährlich zu?

a) Der Energieverbrauch **verdoppelt sich in 20 Jahren**.

2500 Mwh/a Pdorf

$2\,500\,a^{20} = 5000$

$a^{20} = 2 \quad | \sqrt[20]{\ }$

$a \approx 1.04$

Prozent = 3.53

b) Der Energieverbrauch **verdreifacht sich in 30 Jahren**.

$2500\,a^{30} = 7500$

$a^{30} = 3$

$a \approx 1.04$

Protzent = 3.73

K**ontrollaufgabe **4

Bei einem exponentiellen Zerfallsvorgang ist der Anfangsbestand $B(0) = 15$.
Bestimme $B(10)$ *auf zwei Nachkommastellen genau* bei …

a) einer prozentualen Abnahme p von 5% pro Zeiteinheit.

$$15 \cdot 0.95^{10} = \underline{\underline{8.98}}$$

b) einem Wachstumsfaktor a von 0.89 pro Zeiteinheit.

$$15 \cdot 0.89^{10} = \underline{\underline{4.68}}$$

c) einer Halbwertszeit von 3 Zeiteinheiten.

$$15 \cdot a^3 = 7.5$$

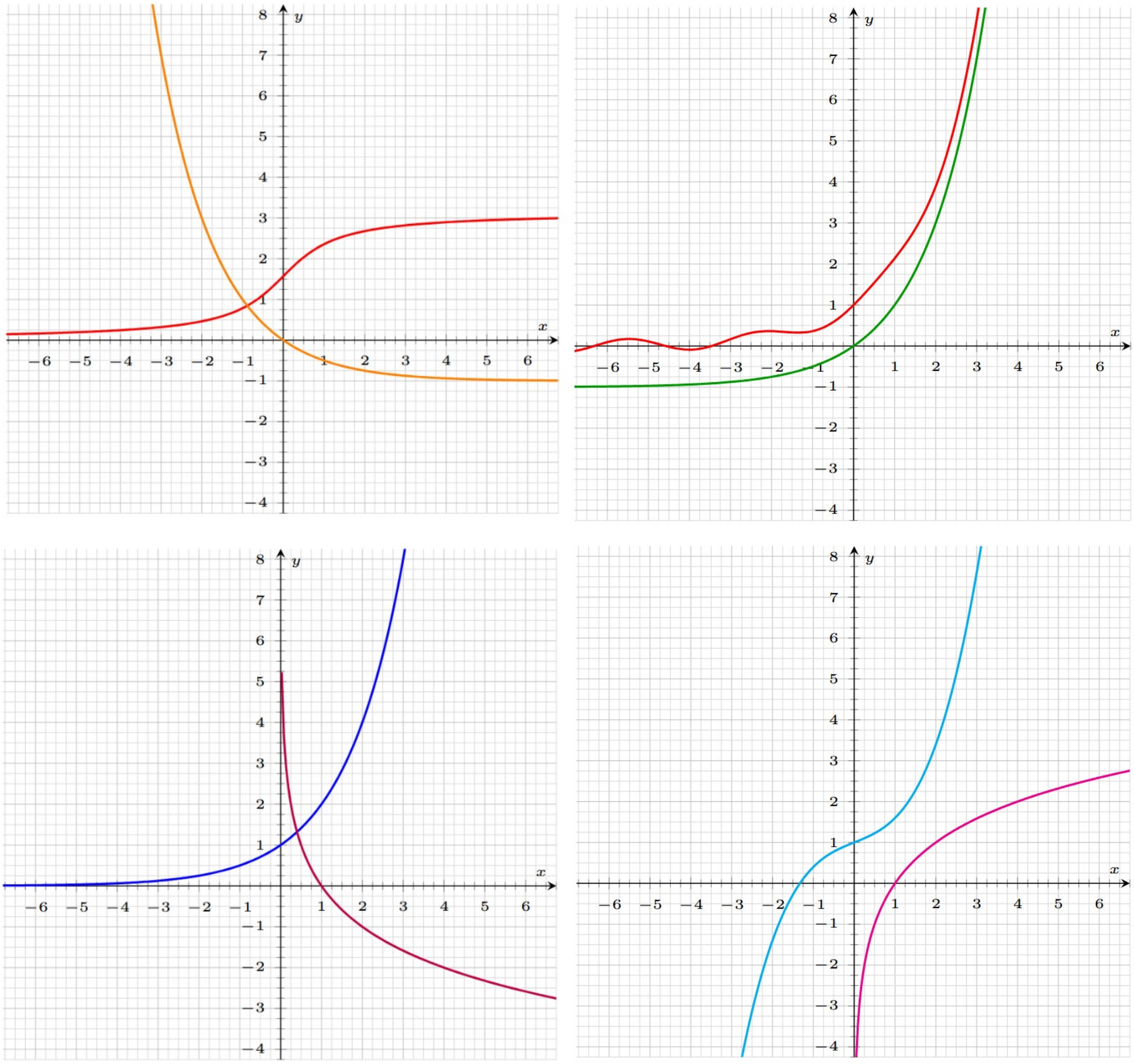
$$a^3 = \frac{1}{2} \quad | \sqrt[3]{}$$

$$a = 0.79$$

2. Graphen von Exponentialfunktionen

Von den abgebildeten Graphen entspricht genau *einer* dem Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$.

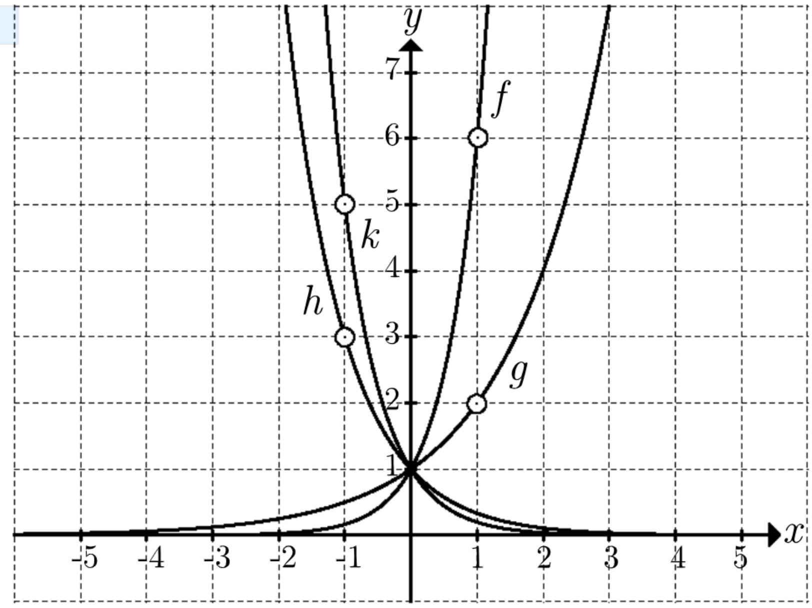
Finde heraus, um welchen es sich handelt und bestimme den Wert des Parameters a.



Zusatzfrage:
Bei welchem der Graphen handelt es sich um den Graphen der Umkehrfunktion von f?

Beispiel 1 – Funktionsverlauf durch vorgegebenen Punkt

Die eingezeichneten Exponentialfunktionen sind von der Form $y = a^x$. Bestimme für jede Funktion die Basis a.

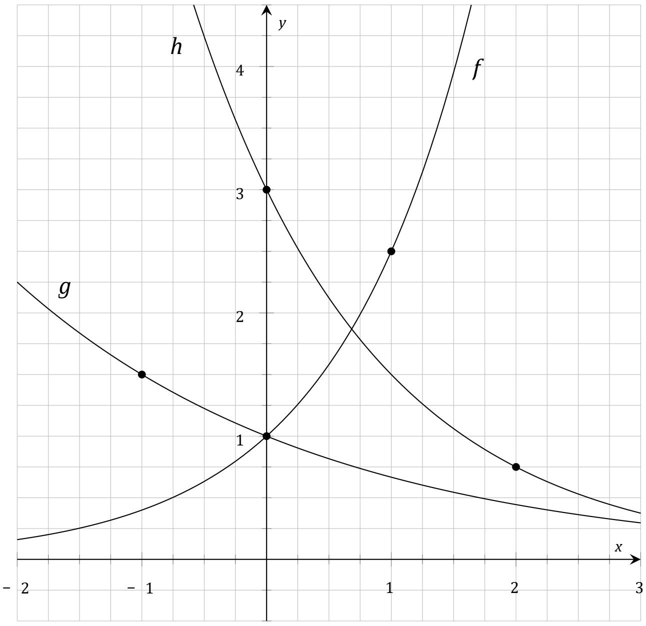


Beispiel 2 – Funktionsverlauf durch zwei vorgegebene Punkte

Bestimme die Parameter a und b so, dass der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte $P(2 \mid \frac{27}{5})$ und $Q(-1 \mid 25)$ verläuft. Ist die Funktion monoton wachsend oder monoton fallend?

Beispiel 3 – Funktionsgleichung bestimmen

Abgebildet sind Exponentialfunktionen der Form $y = b \cdot a^x$. Gib für jede Kurve die passende **Funktionsgleichung** an.



Zugehörige Aufgaben: 12, 27 – 40

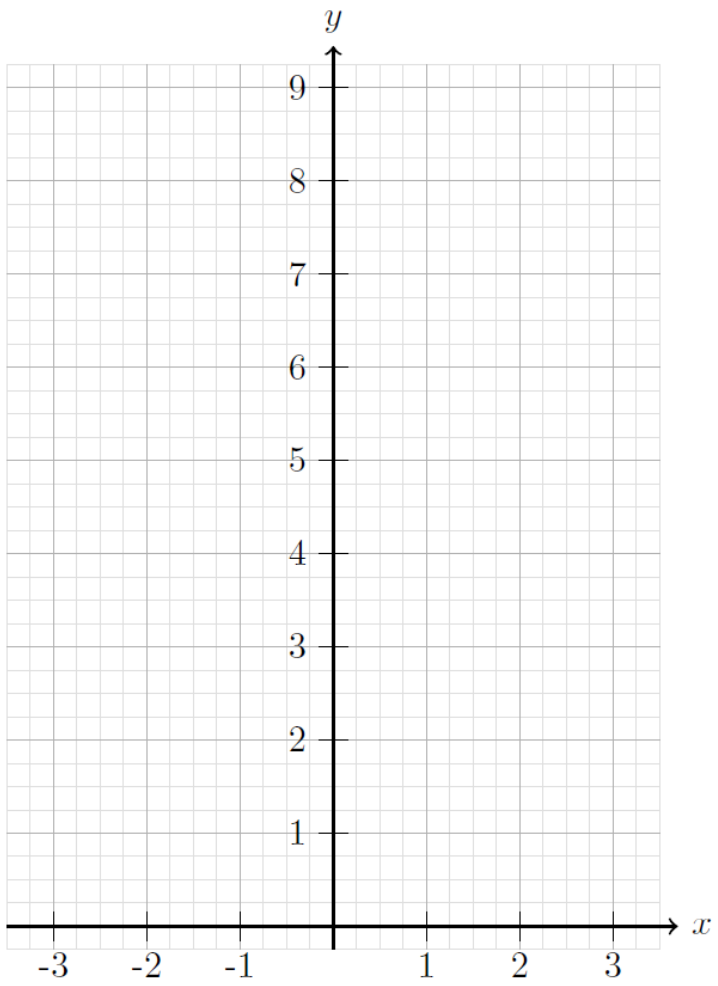
Lernaufgabe 1

Vervollständige für die beiden Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 0.5^x$ die Wertetabelle

Wertetabelle:

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
f(x)					
g(x)					

und zeichne beide Funktionen in das Koordinatensystem:



Beobachtung:

....

....

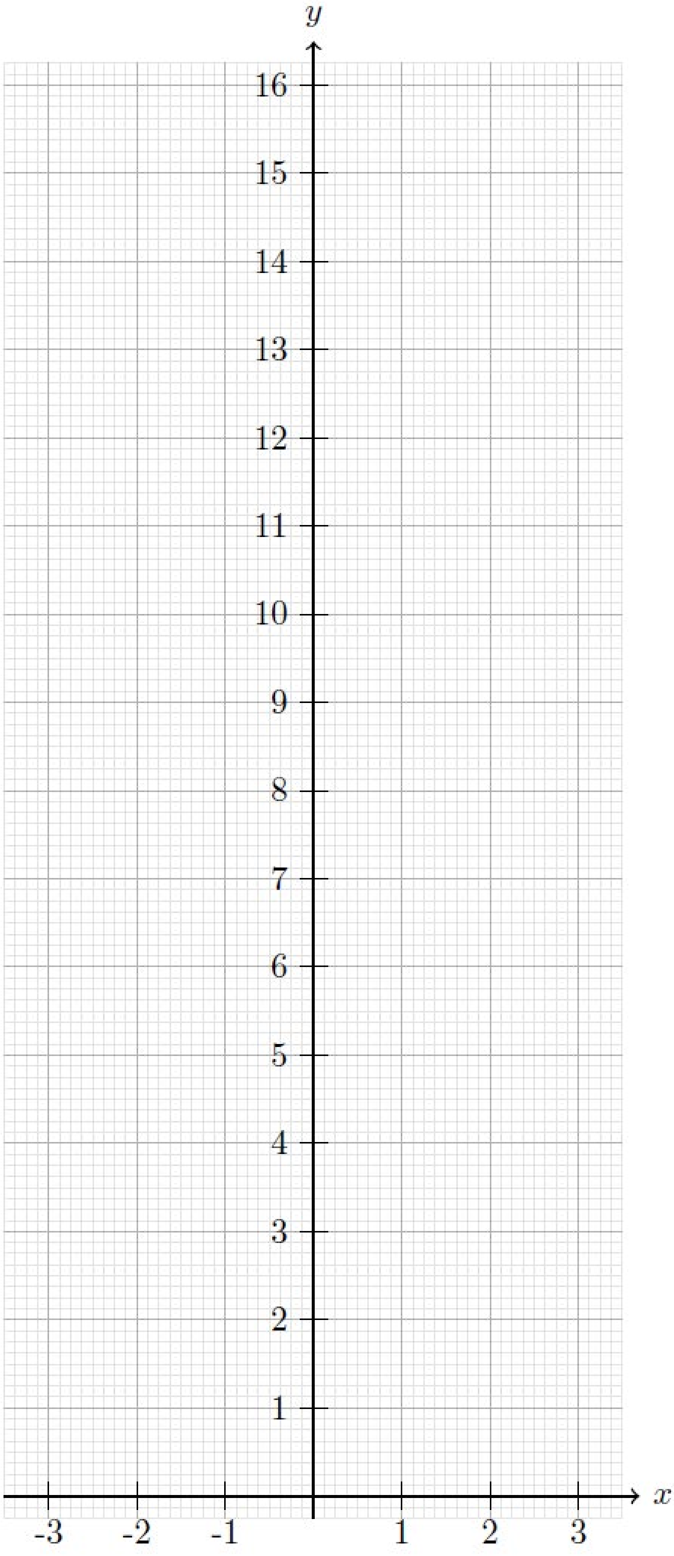
....

Begründung:

$$f(-x) = \qquad = \qquad = \qquad = \qquad = g(x)$$

Lernaufgabe 2

Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x) = b \cdot 2^x$ für $b = \frac{1}{2},\ 1,\ 2$ in das Koordinatensystem.



Welche Wirkung hat der Parameter b auf die Graphen der Funktionen?

Antwort:

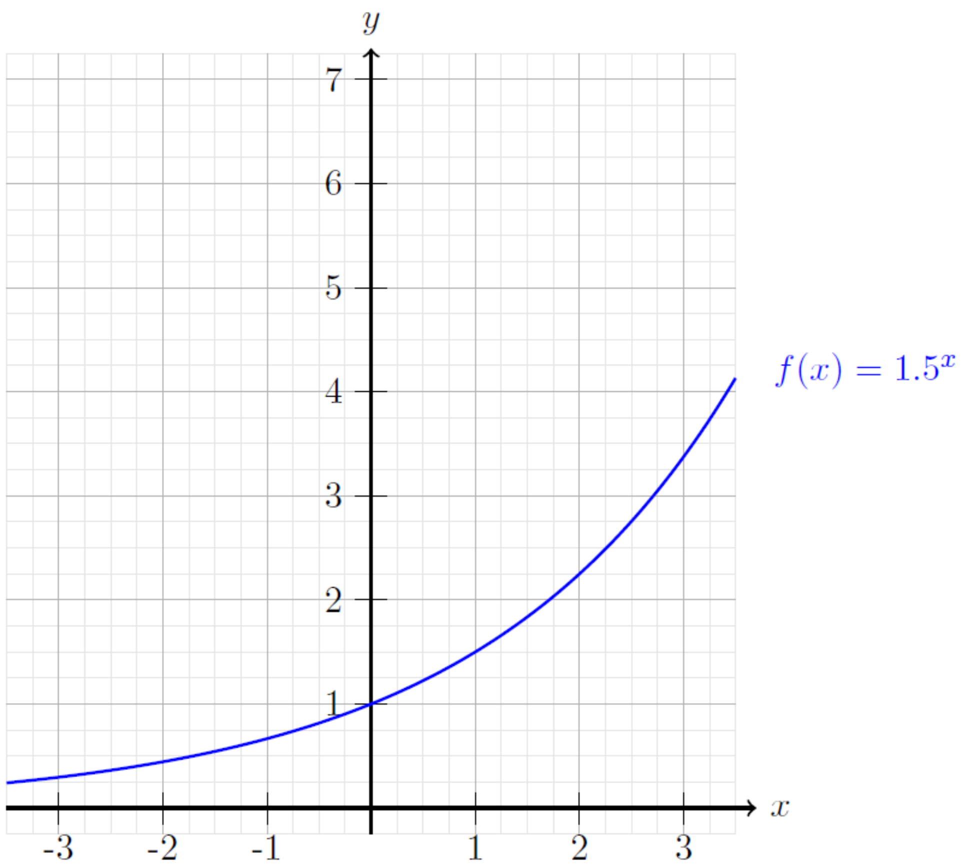
Lernaufgabe 3

Verwende den bereits eingezeichneten Graphen der Funktion $f(x) = 1.5^x$ um die Graphen der folgenden Funktionen möglichst genau zu zeichnen:

a) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

b) $h(x) = 2.25 \cdot 1.5^x$

c) $i(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1.5^x$

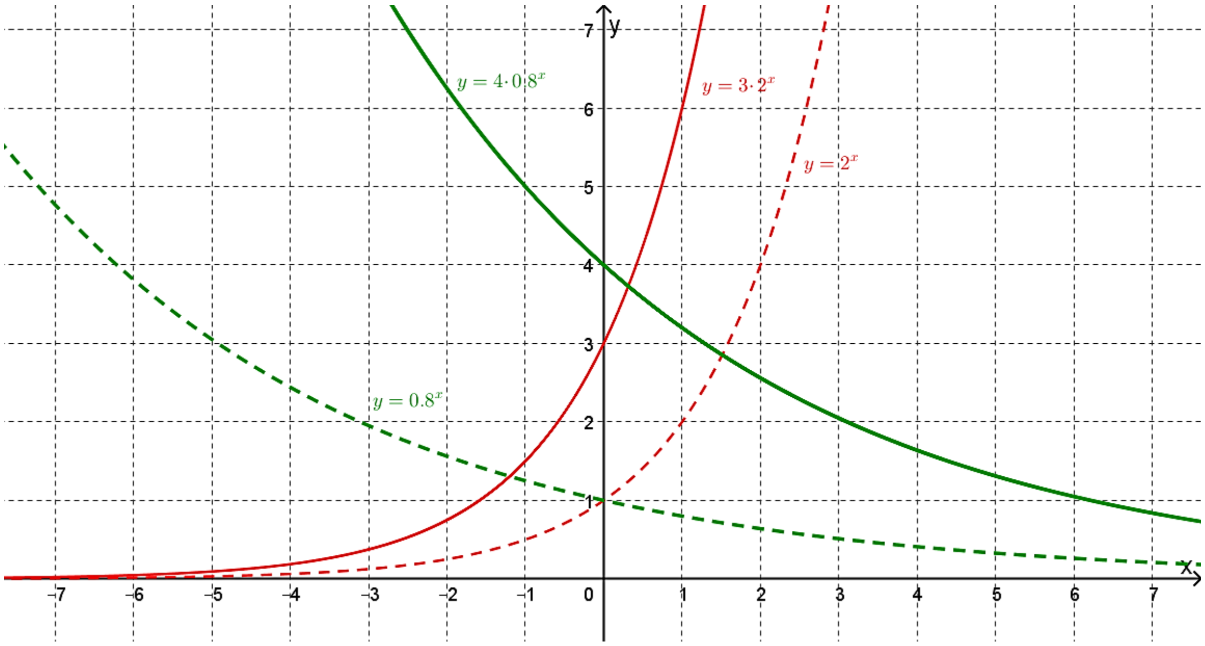


Zusammenfassung:

Die allgemeine Form der Exponentialfunktion lautet:

$$\boxed{y = f(x) = b \cdot a^x}$$

Die reelle Zahl a heisst *Basis* der Exponentialfunktion. Für die Basis gelten die Einschränkungen $a > 0$ und $a \neq 1$.



Der Graph der Exponentialfunktion $y = b \cdot a^x$ geht aus dem Graphen von $y = a^x$ hervor

- durch Strecken (falls $|b| > 1$) in Richtung der y-Achse mit dem Faktor $|b|$.
- oder Stauchen (falls $|b| < 1$) in Richtung der y-Achse mit dem Faktor $|b|$.

Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = a^x$

- Alle Graphen verlaufen durch den Punkt ____________
- Monotonie: Falls ____________ so ist die Funktion_________________.

  Falls ____________ so ist die Funktion_________________.
- Asymptoten: Die Graphen schmiegen sich von oben der _________________ an.

  (Die ____________bildet die Asymptote der Kurve.)

- Symmetrien: Die Graphen von $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ liegen symmetrisch zur ___________.
- Definitionsmenge: $D =$ Wertemenge: $W =$
- Grenzverhalten:

Wenn x auf der x-Achse nach rechts strebt, dann streben die Funktionswerte nach

______________________________ (werden beliebig gross) wenn $a > 1$.

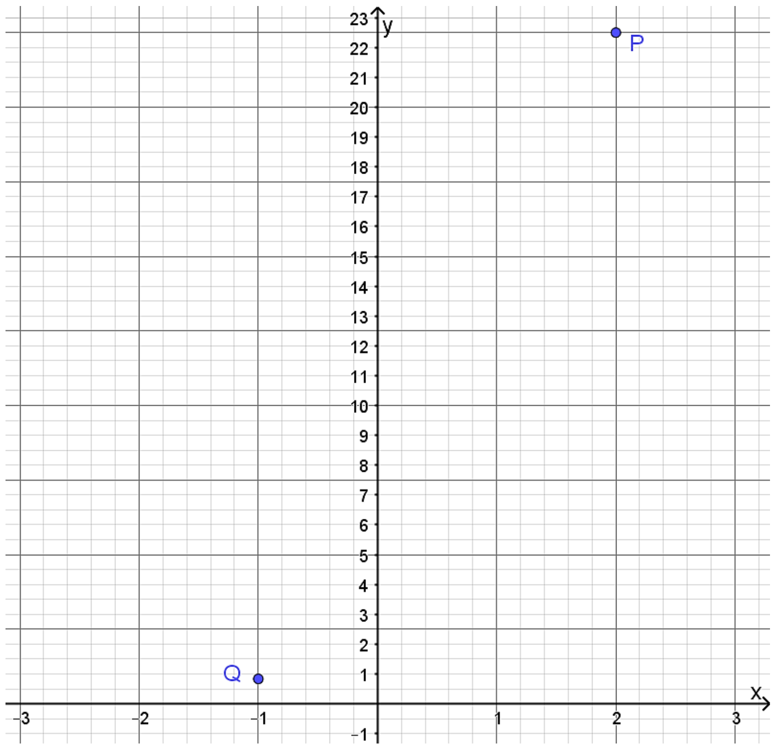
Wenn x auf der x-Achse nach links strebt, dann streben die Funktionswerte nach

____________________________ wenn $a > 1$.

Zugehörige Aufgaben: 23 – 26, 75 – 78

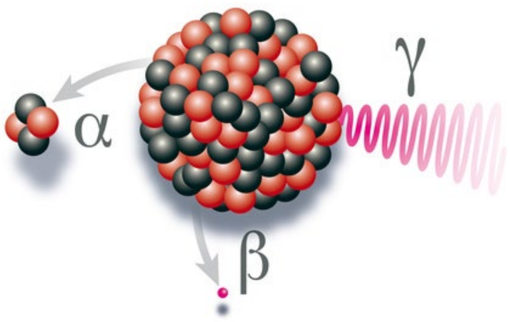
K**ontrollaufgabe **5

Der Graph einer Exponentialfunktion $y = f(x) = b \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte $P\left(2 \;\middle|\; \frac{45}{2}\right)$ und $Q_1\left(-1 \;\middle|\; \frac{5}{6}\right)$. Bestimme die Parameter a und b. Zeichne zudem den Graphen der Funktion im angegebenen Koordinatensystem ein.



3. Radioaktiver Zerfall

Unter **radioaktivem Zerfall** oder **Kernzerfall** versteht man die Eigenschaft instabiler Atomkerne, sich spontan unter Energieabgabe umzuwandeln.



Atomkerne altern nicht. Ob ein Kern im nächsten Moment zerfällt, hängt nicht davon ab, wie lange er schon auf sein Ableben wartet. Er zerfällt zufällig!

*Die **Halbwertszeit** ist die Zeitspanne, nach der eine mit der Zeit abnehmende Grösse die Hälfte des anfänglichen Werts erreicht.*

Beispiel 1

a) In einer Probe bestehend aus 200 Atomkernen des Typs F-18 (Fluor) zerfallen jede Minute 0.629% der vorhandenen Atomkerne. Berechne die Halbwertszeit von F-18. (*in Minuten auf 2 Nachkommastellen gerundet*).

b) In einer Probe bestehend aus K_0 Atomkernen des Typs S-35 (Schwefel) zerfallen jeden Tag 0.789% der vorhandenen Atomkerne. Berechne die Halbwertszeit von S-35. (*in Tagen auf 2 Nachkommastellen gerundet*).

Anwendung: C-14-Methode zur Altersbestimmung

In lebenden Organismen besteht Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen C12 und aus radioaktiven Atomkernen C14. Die radioaktiven Atomkerne entstehen durch kosmische Strahlung. Das Mischverhältnis dieser Atomkerne ist für lebende Organismen (Pflanze oder Tier) nahezu konstant.

Stirbt jedoch ein Organismus, so wird kein Kohlenstoff mehr aufgenommen. Das radioaktive C14 zerfällt, der nicht-radioaktive Kohlenstoff bleibt nahezu erhalten. Damit verändert sich das Verhältnis von radioaktivem, und nicht-radioaktivem Kohlenstoff im Laufe der Zeit.

Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen die Gletschermumie «Ötzi» gefunden. Die Mumie enthielt nur noch ca. 53% des Kohlenstoffs C14, der in lebendem Gewebe enthalten ist.

Vor wie vielen Jahren hat «Ötzi» etwa gelebt?

Beispiel 1 -- Lascaux-Höhle

Die Lascaux-Höhle in Frankreich ist berühmt für ihre Höhlenmalereien. Holzkohle aus einer Fundstelle in der Höhle hatte im Jahr 1950 einen C14-Gehalt von ca. 6.3% verglichen mit dem C14-Gehalt in lebendem Holz.

Wann entstand diese Höhlenmalerei vermutlich?

4. Die Eulersche Zahl e

Du legst ein Startkapital von 1 CHF bei einer Bank an. Der Zins wird jeweils am Ende der Zinsperiode zum Kapital dazugerechnet. Es stehen die folgenden sechs Sparpläne zur Auswahl.

A Zinsperiode: halbjährlich Zinssatz: 50%	**B** Zinsperiode: vierteljährlich Zinssatz: 25%	**C** Zinsperiode: monatlich Zinssatz: $\frac{100}{12}$ %
D Zinsperiode: täglich Zinssatz: $\frac{100}{365}$ %	**E** Zinsperiode: stündlich Zinssatz: $\frac{100}{8760}$ %	**F** Zinsperiode: minütlich Zinssatz: $\frac{100}{525600}$ %

Welchen Sparplan sollte man wählen, damit man **nach einem Jahr** möglichst viel Geld auf dem Konto hat?

Eigener Sparplan

Zinsperiode: n Zinssatz: $\frac{100}{n}$ %

Gewähltes n: Geld auf dem Konto am Ende des Jahres:

……………………………… ………………………………………………

Eulersche Zahl e

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354
759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563
073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416
750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183
860626133138458300075204493382656029760673711320070932870912744374704723069697
720931014169283681902551510865746377211125238978442505695369677078544996996794
686445490598793163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366803
318252886939849646510582093923982948879332036250944311730123819706841614039701
983767932068328237646480429531180232878250981945581530175671736133206981125099
618188159304169035159888851934580727386673858942287922849989208680582574927961
048419844436346324496848756023362482704197862320900216099023530436994184914631
409343173814364054625315209618369088870701676839642437814059271456354906130310
720851038375051011574770417189861068739696552126715468895703503540212340784981
933432106817012100562788023519303322474501585390473041995777709350366041699732
972508868769664035557071622684471625607988265178713419512466520103059212366771
943252786753985589448969709640975459185695638023637016211204774272283648961342
251644507818244235294863637214174023889344124796357437026375529444833799801612
549227850925778256209262264832627793338656648162772516401910590049164499828931
...

Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Geschichte. Euler befasste sich mit verschiedenen Themen der Mathematik und leistete wichtige Beiträge in insgesamt 866 Publikationen. Viele mathematische Symbole gehen auf Euler zurück. Er war es beispielsweise, welcher die Verwendung des griechischen Buchstabens π für die Kreiszahl 3.1415 …. populär machte.

Schweizer 10-Franken-Banknote
der 6. Serie (ausgegeben 1979 – 1992)