

Exponentialfunktionen

1. Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Beispiel 1 – Bakterien

Das strahlungsresistenteste Lebewesen überhaupt ist gemäss dem Guinness-Buch der Rekorde das Bakterium *Deinococcus radiodurans*. Es kann unter extremen Umweltbedingungen überleben und gedeihen. Es kommt beispielsweise in Atomreaktoren sowie auf der Aussenhülle der Internationalen Raumstation ISS vor. Unter günstigen Bedingungen wächst die Anzahl der Bakterien innerhalb einer Stunde um 40 %.



Zu Beginn der Beobachtung sind bereits 25 Millionen Bakterien vorhanden. Vervollständige die folgende Tabelle.

Zeit in Stunden	0	1	2	3	4	...	8
Bakterien in Millionen	25	35	49	68.6	96.04	...	$25 \cdot (1.4)^8$

Handwritten annotations below the table show arrows indicating the growth factor of 1.4 between consecutive time points: 0 to 1, 1 to 2, 2 to 3, and 3 to 4.

Prozentuale Zunahme $p = \dots 40\%$ Wachstumsfaktor $a = \dots 1.4$
Anfangswert $b = \dots 25$

Kennt man den Wachstumsfaktor a und den Anfangswert b , so kann der 8. Eintrag der Tabelle wie folgt berechnet werden

$$\text{8. Eintrag} = 25 \cdot (1.4)^8$$

Die Anzahl Millionen Bakterien nach x Stunden wird mit folgender Wachstumsfunktion beschrieben

$$W(x) = \dots b \cdot a^x \dots$$

In Worten: Man rechnet den Wachstumsfaktor $(1 + (\text{Prozentuale Zunahme} / 100))$ mit der Potenz wie oft man es um den Wachstumsfaktor vergrössert. All dass Multipliziert man mit dem Anfangswert.

Für den Wachstumsfaktor a und die prozentuale Änderung p gilt der folgende Zusammenhang

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

Beispiel 2 – Einwohnerzahl der Schweiz

Die Schweiz hat laut Bundesamt für Statistik Ende Juni 2025 die Marke von 9 Millionen Einwohnern erreicht. Das Bevölkerungswachstum beträgt jährlich 1.0%.

a) Wie lautet der Wachstumsfaktor a ?

$$a = 1.01$$

b) Vervollständige die Tabelle

Jahr	2023	2024	2025	2026	2027	...	2050
Einwohner in Millionen	$9 \cdot (1.01)^2$	$9 \cdot (1.01)^1$	9	9.09	$9 \cdot (1.01)^2 \dots$		$9 \cdot (1.01)^{25}$

\swarrow \swarrow \swarrow \swarrow
 -1.01 -1.01 -1.01 -1.01

Wachstumsfunktion:

$$W(x) = 9 \cdot (1.01)^x$$

c) Wie viele Einwohner hatte die Schweiz im Jahr 1925? (auf zwei Nachkommastellen gerundet)

$$9 \cdot (1.01)^{-100} = W(-100) \approx 3.33 \text{ Mio}$$

Beispiel 3 – Pandabären

Die Population der Pandabären in einem Naturschutzgebiet in China beträgt aktuell 4096 Tiere. Leider nimmt die Population jedes Jahr um 12.5% ab.

a) Wie viele Pandabären leben nach 1 Jahr, 2 Jahren und 3 Jahren noch im Naturschutzgebiet?

$$\rightarrow a = 1 - 0.125 = 0.875$$

$$\text{nach 1 Jahr} : 4096 \cdot 0.875 = 3584 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \cdot 0.875$$

$$\text{nach 2 Jahren} : 4096 \cdot (0.875)^2 = 3136 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \cdot 0.875$$

$$\text{nach 3 Jahren} : 4096 \cdot (0.875)^3 = 2744 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \cdot 0.875$$

Wachstumsfaktor:

b) Nach 4 Jahren wird das Naturschutzgebiet vergrößert und durch die Vergrößerung kommen k Pandabären zusätzlich zur bestehenden Population hinzu. Nach zwei weiteren Jahren besteht die Population aus 1862 Tieren. Berechne k.

$$\text{Nach 4 Jahren} : 2401 = 4096 \cdot (0.875)^4$$

neue Pandas: k

(7)

Neuer Anfangswert $2401 + k$

Neue Wachstumsfunktion: $f(x) = (2401 + k) \cdot (0.875)^x$

$$f(2) = 1862$$

$$(2401 + k) \cdot (0.875)^2 = 1862 \quad | : (0.875)^2$$

Zugehörige Aufgaben: 79 – 82

$$k = 31$$

Exponentielles Wachstum/Exponentieller Zerfall

wird ausgeschlossen

$a < 0$

$a = -2$

$(-2)^x$

$x = \frac{1}{2}$

$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$

def nicht

Wachstumsfunktion

$W(x) = b \cdot a^x$

x: Variable (Vergangene Zeit)

b: Anfangswert

$a = 1?$

Exponentielles Wachstum für $a > 1$;

$\rightarrow W(x) = 6 \cdot 2^x = 6$

Exponentieller Zerfall für $0 < a < 1$.

konstante Funktion

Eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = b \cdot a^x$ heisst **Exponentialfunktion**. Hierbei ist $a > 0$ mit $a \neq 1$ der **Wachstumsfaktor** und b der Funktionswert an der Stelle $x = 0$. Er wird auch **Anfangswert** genannt.

→ Die Bedingung „wenn sich x um 1 erhöht, soll y um p % **anwachsen**“ bedeutet:

Exponentielles Wachstum nach dem Gesetz $y = f(x) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$

Zahlenbeispiel:

Tägliche Zunahme um $p = 2.5\%$

Wachstumsfaktor $a = 1 + \frac{2.5}{100} = 1 + 0.025 = \underline{1.025} > 1$

→ Die Bedingung „wenn sich x um 1 erhöht, soll y um p % **abnehmen**“ bedeutet:

Exponentieller Zerfall nach dem Gesetz $y = f(x) = b \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$

Zahlenbeispiel:

Tägliche Abnahme um $p = 2.5\%$

Wachstumsfaktor $a = 1 - \frac{2.5}{100} = 1 - 0.025 = \underline{0.975} < 1$

Beispiel 4 – Wertabnahme eines Computers

Ein Computer mit dem Neuwert 5000 Fr. wird nach 7 Jahren für 800 Fr. verkauft. Die jährliche Wertabnahme ist exponentiell.

a) Wie viel Prozent p beträgt die jährliche Wertabnahme?

$$\begin{array}{l|l} 800 = 5000 \cdot a^7 & : 5000 \\ \frac{4}{25} = a^7 & \\ a = \sqrt[7]{\frac{4}{25}} & \sqrt[7]{\phantom{\frac{4}{25}}} \end{array} \quad p = 23\%$$

b) Wie gross wäre der Wert des Computers nach 4 Jahren gewesen?

$$5000 \cdot (a)^4 \approx 1755$$

c) Wie viel Prozent p beträgt die halbjährliche Wertabnahme?

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 5000 \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}\right) \text{ — Halbjährliches Wachstum}$$

$p = 72\%$

Halbwertszeit und Verdoppelungszeit

Verdoppelungszeit = Vergangene Zeit bis sich der Anfangswert verdoppelt hat

Halbwertszeit = Vergangene Zeit bis sich der Anfangswert halbiert hat

Beobachtung: $W(x) = b \cdot a^x$

Gleichung für Halbwertszeit:

$$\begin{aligned}W(x) &= b \cdot \frac{1}{2} \\ b \cdot a^x &= b \cdot \frac{1}{2} \\ a^x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Gleichung für Verdoppelungszeit:

$$a^x = 2$$

Zugehörige Aufgaben: 111, 112, 122

Beispiel 5 – Schadstoffe in einem See

Ein durch 10t chemische Schadstoffe verunreinigter See kann jährlich 10% des noch vorhandenen Schadstoffes abbauen.

- a) Stelle eine Formel für die vorhandene Schadstoffmenge $s(x)$ nach x Jahren auf.

$$s(x) = b \cdot a^x \qquad 1 - 0.1 = 0.9$$
$$= 10t \cdot 0.9^x$$

- b) Welche Menge an Schadstoffen wird nach 10 Jahren im See noch vorhanden sein?

$$= 10t \cdot 0.9^{10} = 3.49t$$

- c) Wenn die Schadstoffmenge im See noch 1 Prozent des Anfangswertes beträgt, dann wird der See wieder zum Baden frei gegeben. Wann wird dies der Fall sein?

$$10t \cdot 0.9^x = 0.1$$

$$\log_{0.9}(0.01) = x = 43.71 \text{ Jahre}$$

$$0.01 \cdot 10 = 10 \cdot (0.9)^x \qquad | : 10$$

$$0.01 = (0.9)^x$$

$$x = \log_{0.9}(0.01)$$

$$\approx 43.71$$

ca. nach
44 Jahren

Kontrollaufgabe 2

Bei einer Bakterienkultur ohne Raum- und Nahrungsmangel wächst die Bakterienzahl mit der Zeit exponentiell an. Um 8 Uhr hat es 500 Bakterien und um 12 Uhr bereits 2000 Bakterien.

a) Wie viele Bakterien hat es um 9 Uhr? (*auf ganze Bakterien runden*)

b) Wie viele Bakterien hatte es um 7 Uhr? (*auf ganze Bakterien runden*)

Kontrollaufgabe 3

Um wie viel Prozent nimmt der Energieverbrauch einer Stadt jährlich zu?

a) Der Energieverbrauch **verdoppelt sich in 20 Jahren**.

b) Der Energieverbrauch **verdreifacht sich in 30 Jahren**.

Kontrollaufgabe 4

Bei einem exponentiellen Zerfallsvorgang ist der Anfangsbestand $B(0) = 15$.
Bestimme $B(10)$ auf zwei Nachkommastellen genau bei ...

a) einer prozentualen Abnahme p von 5% pro Zeiteinheit.

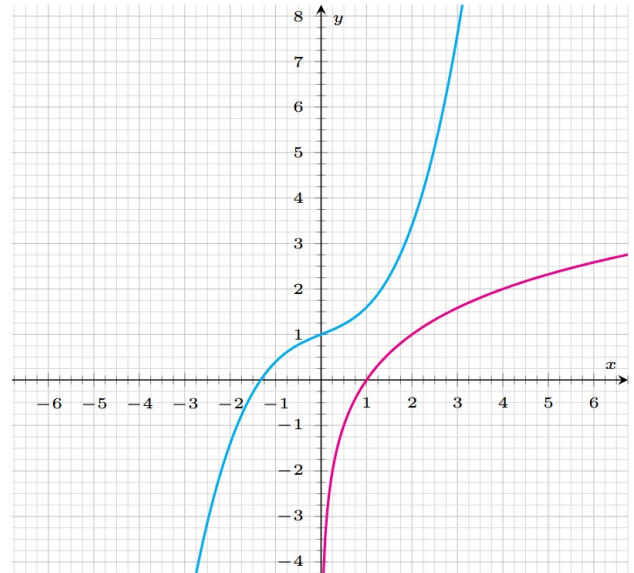
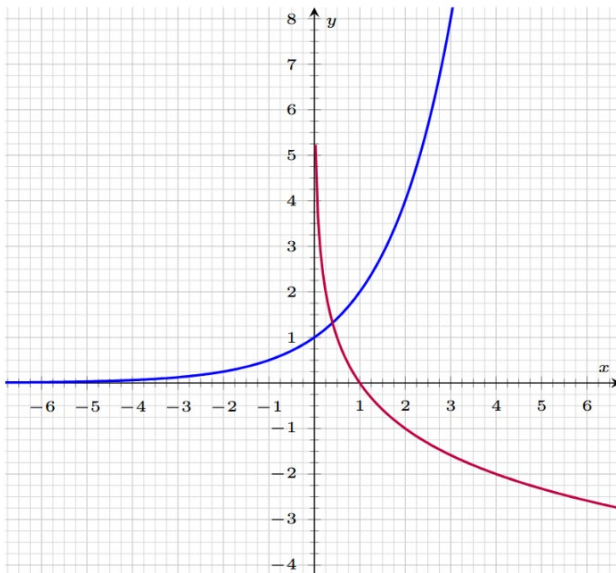
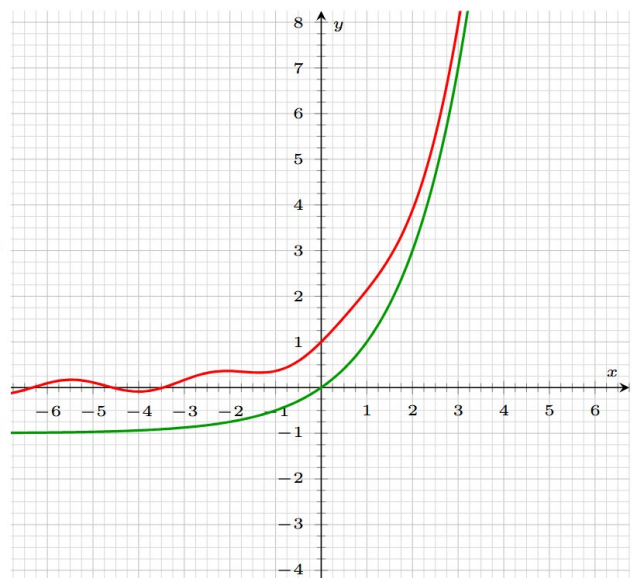
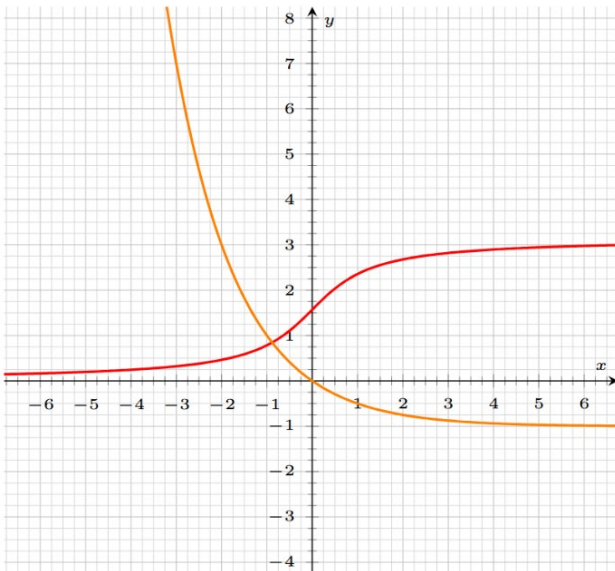
b) einem Wachstumsfaktor a von 0.89 pro Zeiteinheit.

c) einer Halbwertszeit von 3 Zeiteinheiten.

2. Graphen von Exponentialfunktionen

Von den abgebildeten Graphen entspricht genau *einer* dem Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$.

Finde heraus, um welchen es sich handelt und bestimme den Wert des Parameters a .

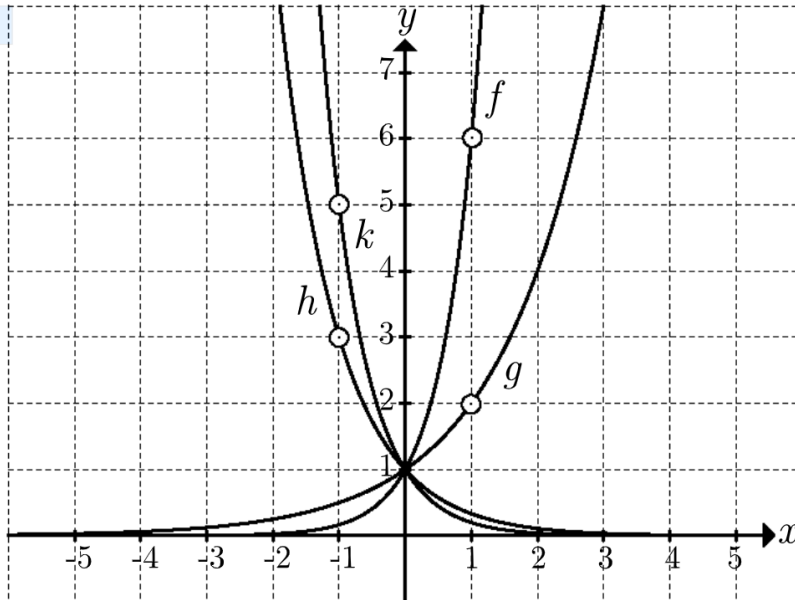


Zusatzfrage:

Bei welchem der Graphen handelt es sich um den Graphen der Umkehrfunktion von f ?

Beispiel 1 – Funktionsverlauf durch vorgegebenen Punkt

Die eingezeichneten Exponentialfunktionen sind von der Form $y = a^x$. Bestimme für jede Funktion die Basis a .

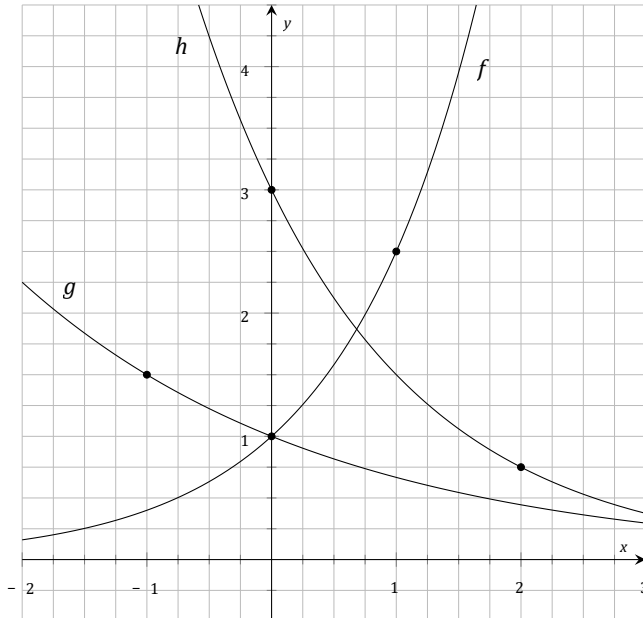


Beispiel 2 – Funktionsverlauf durch zwei vorgegebene Punkte

Bestimme die Parameter a und b so, dass der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ durch die Punkte $P(2 \mid \frac{27}{5})$ und $Q(-1 \mid 25)$ verläuft. Ist die Funktion monoton wachsend oder monoton fallend?

Beispiel 3 – Funktionsgleichung bestimmen

Abgebildet sind Exponentialfunktionen der Form $y = b \cdot a^x$. Gib für jede Kurve die passende **Funktionsgleichung** an.



Zugehörige Aufgaben: 12, 27 – 40

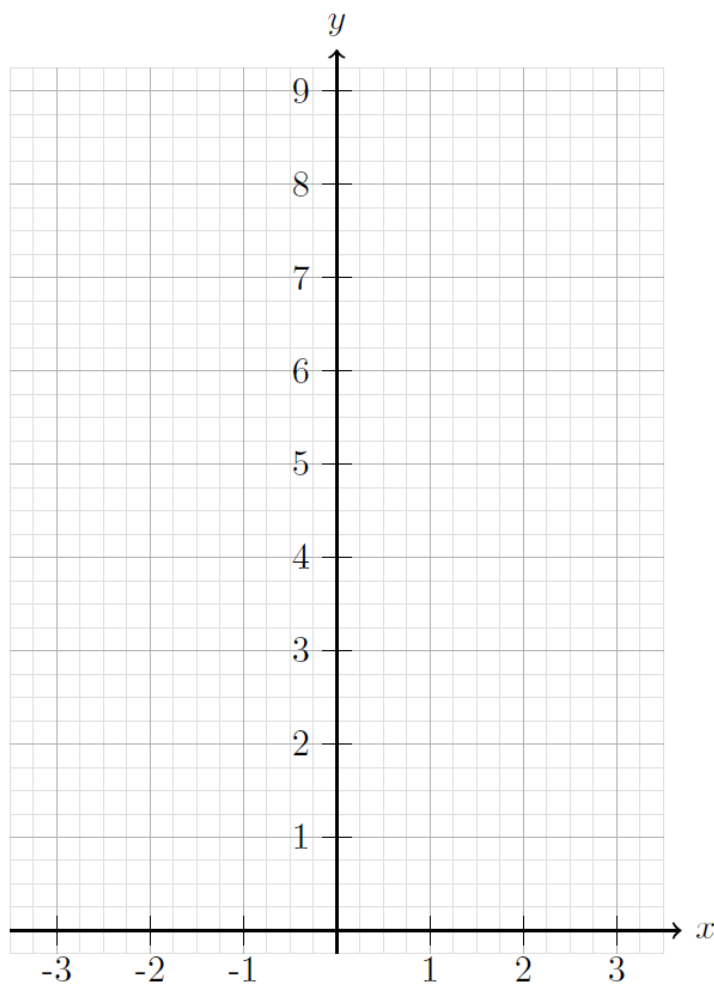
Lernaufgabe 1

Vervollständige für die beiden Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 0.5^x$ die Wertetabelle

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					
g(x)					

und zeichne beide Funktionen in das Koordinatensystem:



Beobachtung:

.....

.....

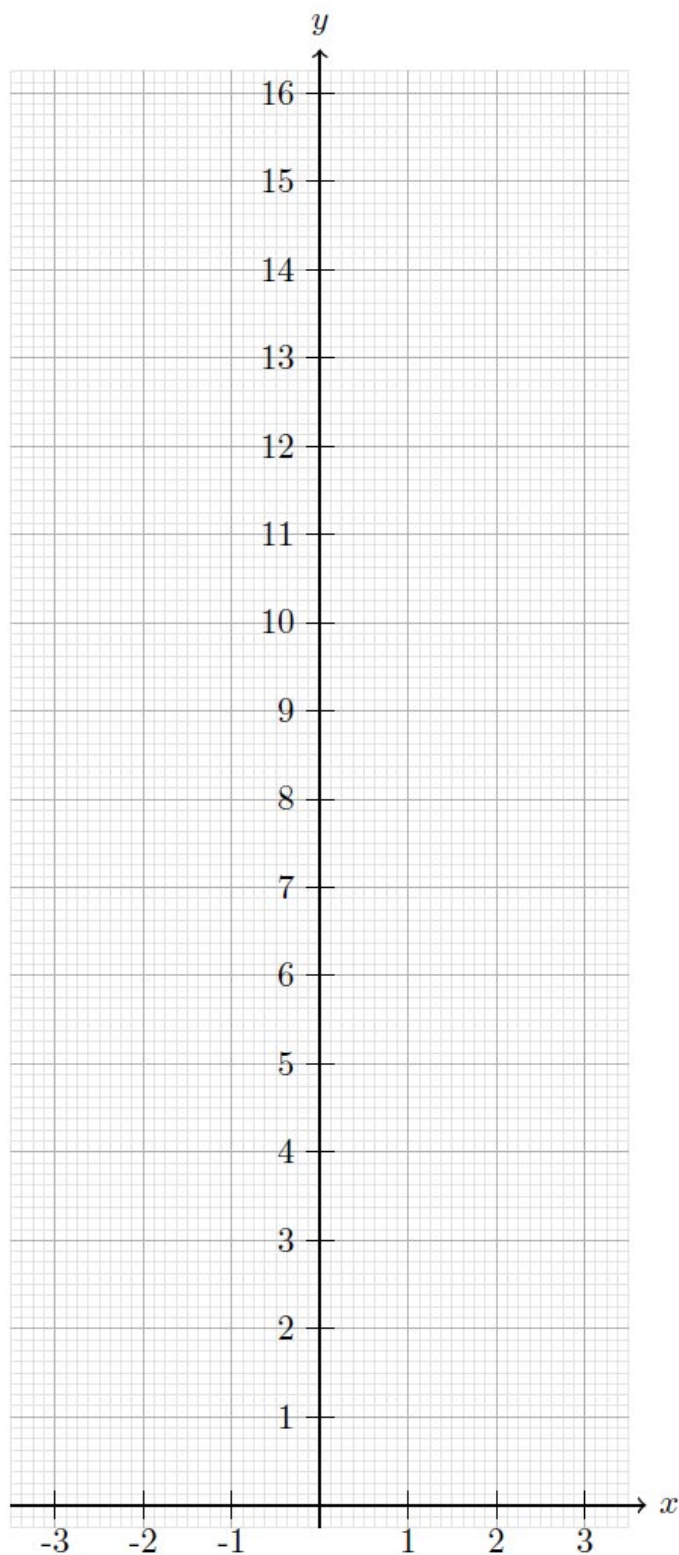
.....

Begründung:

$$f(-x) = \quad = \quad = \quad = \quad = g(x)$$

Lernaufgabe 2

Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x) = b \cdot 2^x$ für $b = \frac{1}{2}$, 1, 2 in das Koordinatensystem.



Welche Wirkung hat der Parameter b auf die Graphen der Funktionen?

Antwort:

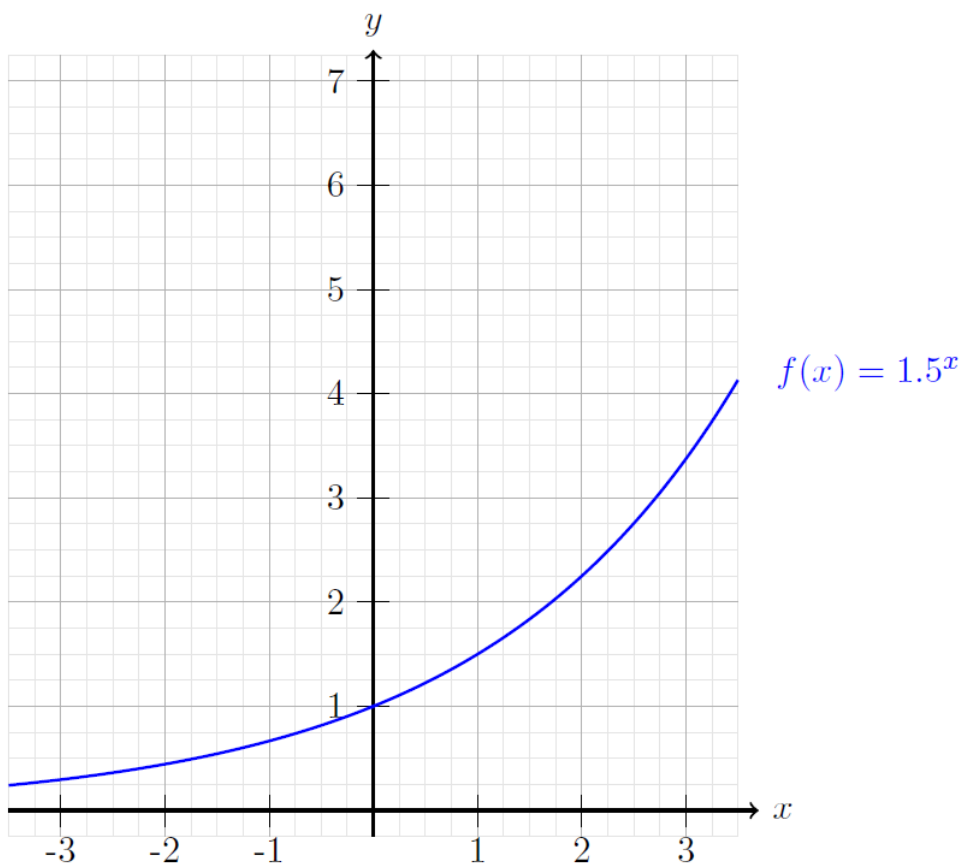
Lernaufgabe 3

Verwende den bereits eingezeichneten Graphen der Funktion $f(x) = 1.5^x$ um die Graphen der folgenden Funktionen möglichst genau zu zeichnen:

a) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

b) $h(x) = 2.25 \cdot 1.5^x$

c) $i(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1.5^x$

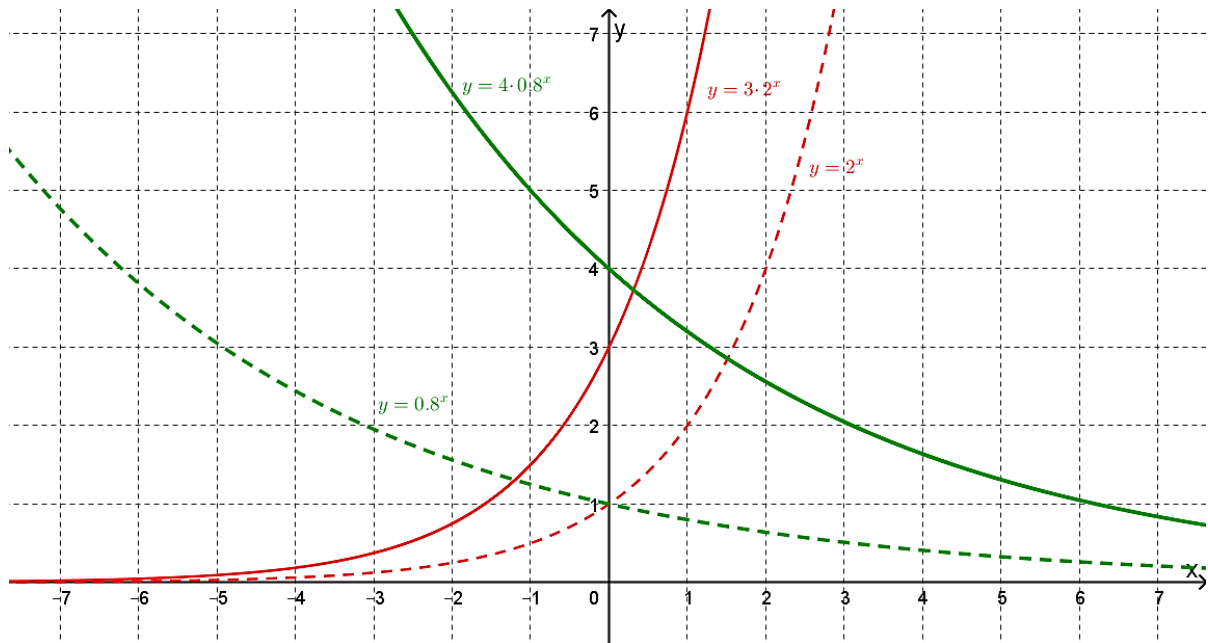


Zusammenfassung:

Die allgemeine Form der Exponentialfunktion lautet:

$$y = f(x) = b \cdot a^x$$

Die reelle Zahl a heisst *Basis* der Exponentialfunktion. Für die Basis gelten die Einschränkungen $a > 0$ und $a \neq 1$.



Der Graph der Exponentialfunktion $y = b \cdot a^x$ geht aus dem Graphen von $y = a^x$ hervor

- durch Strecken (falls $|b| > 1$) in Richtung der y -Achse mit dem Faktor $|b|$.
- oder Stauchen (falls $|b| < 1$) in Richtung der y -Achse mit dem Faktor $|b|$.

Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion $y = a^x$

- Alle Graphen verlaufen durch den Punkt _____
- Monotonie: Falls _____ so ist die Funktion _____.
Falls _____ so ist die Funktion _____.
- Asymptoten: Die Graphen schmiegen sich von oben der _____ an.
(Die _____ bildet die Asymptote der Kurve.)

- Symmetrien: Die Graphen von $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ liegen symmetrisch zur _____.
- Definitionsmenge: $D =$ _____ Wertemenge: $W =$ _____
- Grenzverhalten:

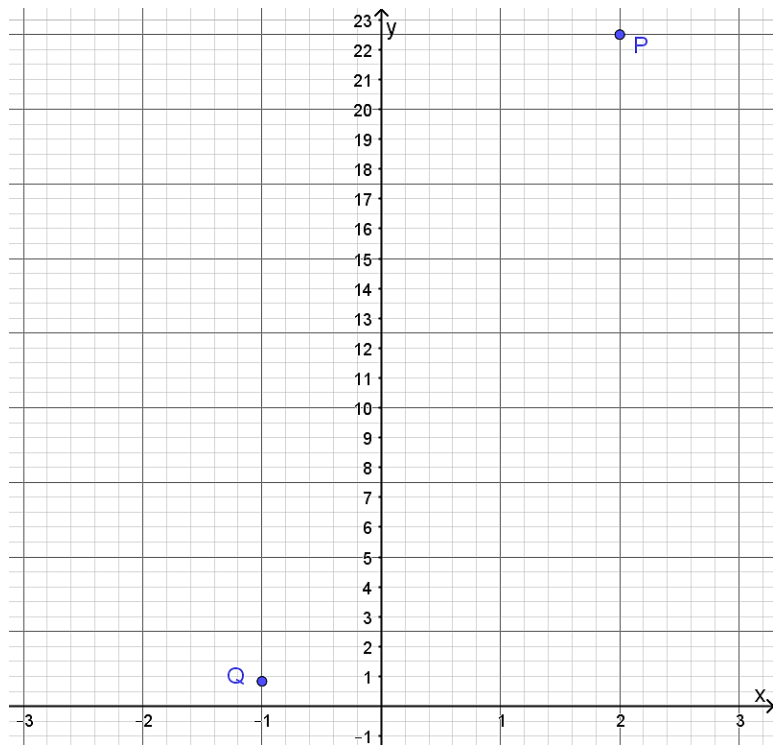
Wenn x auf der x -Achse nach rechts strebt, dann streben die Funktionswerte nach _____ (werden beliebig gross) wenn $a > 1$.

Wenn x auf der x -Achse nach links strebt, dann streben die Funktionswerte nach _____ wenn $a > 1$.

Zugehörige Aufgaben: 23 – 26, 75 – 78

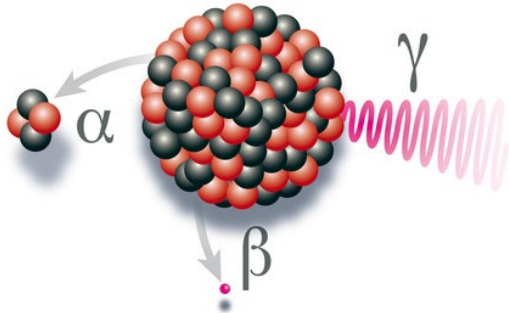
Kontrollaufgabe 5

Der Graph einer Exponentialfunktion $y = f(x) = b \cdot a^x$ verlauft durch die Punkte $P\left(2 \mid \frac{45}{2}\right)$ und $Q_1\left(-1 \mid \frac{5}{6}\right)$. Bestimme die Parameter a und b . Zeichne zudem den Graphen der Funktion im angegebenen Koordinatensystem ein.



3. Radioaktiver Zerfall

Unter **radioaktivem Zerfall** oder **Kernzerfall** versteht man die Eigenschaft instabiler Atomkerne, sich spontan unter Energieabgabe umzuwandeln.



Atomkerne altern nicht. Ob ein Kern im nächsten Moment zerfällt, hängt nicht davon ab, wie lange er schon auf sein Ableben wartet. Er zerfällt zufällig!

Die **Halbwertszeit** ist die Zeitspanne, nach der eine mit der Zeit abnehmende Grösse die Hälfte des anfänglichen Werts erreicht.

Beispiel 1

- a) In einer Probe bestehend aus 200 Atomkernen des Typs F-18 (Fluor) zerfallen jede Minute 0.629% der vorhandenen Atomkerne. Berechne die Halbwertszeit von F-18. (in Minuten auf 2 Nachkommastellen gerundet).

- b) In einer Probe bestehend aus K_0 Atomkernen des Typs S-35 (Schwefel) zerfallen jeden Tag 0.789% der vorhandenen Atomkerne. Berechne die Halbwertszeit von S-35. (in Tagen auf 2 Nachkommastellen gerundet).

Anwendung: C-14-Methode zur Altersbestimmung

In lebenden Organismen besteht Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen C12 und aus radioaktiven Atomkernen C14. Die radioaktiven Atomkerne entstehen durch kosmische Strahlung. Das Mischverhältnis dieser Atomkerne ist für lebende Organismen (Pflanze oder Tier) nahezu konstant.

Stirbt jedoch ein Organismus, so wird kein Kohlenstoff mehr aufgenommen. Das radioaktive C14 zerfällt, der nicht-radioaktive Kohlenstoff bleibt nahezu erhalten. Damit verändert sich das Verhältnis von radioaktivem, und nicht-radioaktivem Kohlenstoff im Laufe der Zeit.

Im Jahr 1991 wurde in den Öztaler Alpen die Gletschermumie «Ötzi» gefunden. Die Mumie enthielt nur noch ca. 53% des Kohlenstoffs C14, der in lebendem Gewebe enthalten ist.

Vor wie vielen Jahren hat «Ötzi» etwa gelebt?

Beispiel 1 -- Lascaux-Höhle

Die Lascaux-Höhle in Frankreich ist berühmt für ihre Höhlenmalereien. Holzkohle aus einer Fundstelle in der Höhle hatte im Jahr 1950 einen C14-Gehalt von ca. 6.3% verglichen mit dem C14-Gehalt in lebendem Holz.

Wann entstand diese Höhlenmalerei vermutlich?



4. Die Eulersche Zahl e

Du legst ein Startkapital von 1 CHF bei einer Bank an. Der Zins wird jeweils am Ende der Zinsperiode zum Kapital dazugerechnet. Es stehen die folgenden sechs Sparpläne zur Auswahl.

A Zinsperiode: halbjährlich Zinssatz: 50%	B Zinsperiode: vierteljährlich Zinssatz: 25%	C Zinsperiode: monatlich Zinssatz: $\frac{100}{12}$ %
D Zinsperiode: täglich Zinssatz: $\frac{100}{365}$ %	E Zinsperiode: stündlich Zinssatz: $\frac{100}{8760}$ %	F Zinsperiode: minütlich Zinssatz: $\frac{100}{525600}$ %

Welchen Sparplan sollte man wählen, damit man **nach einem Jahr** möglichst viel Geld auf dem Konto hat?

Eigener Sparplan

Zinsperiode: n Zinssatz: $\frac{100}{n} \%$

Gewähltes n :

Geld auf dem Konto am Ende des Jahres:

.....

.....

Eulersche Zahl e

$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535$
47594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630
73813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750
92447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062
61331384583000752044933826560297606737113200709328709127443747047230696977209310
14169283681902551510865746377211125238978442505695369677078544996996794686445490
59879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288693
98496465105820939239829488793320362509443117301238197068416140397019837679320683
28237646480429531180232878250981945581530175671736133206981125099618188159304169
03515988885193458072738667385894228792284998920868058257492796104841984443634632
44968487560233624827041978623209002160990235304369941849146314093431738143640546
25315209618369088870701676839642437814059271456354906130310720851038375051011574
77041718986106873969655212671546889570350354021234078498193343210681701210056278
80235193033224745015853904730419957777093503660416997329725088687696640355570716
22684471625607988265178713419512466520103059212366771943252786753985589448969709
64097545918569563802363701621120477427228364896134225164450781824423529486363721
...

Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Geschichte. Euler befasste sich mit verschiedenen Themen der Mathematik und leistete wichtige Beiträge in insgesamt 866 Publikationen. Viele mathematische Symbole gehen auf Euler zurück. Er war es beispielsweise, welcher die Verwendung des griechischen Buchstabens π für die Kreiszahl 3.1415 populär machte.



Schweizer 10-Franken-Banknote der 6. Serie (ausgegeben 1979 – 1992)