(L) Gleichungen mit Logarithmen

Montag, 9. März 2026 09:41

(T)
Gleichung...

6. Gleichungen mit Logarithmen

Repetition

- $10^{\boxed{3}} = 1000$ → $\underline{3}$ ist der Logarithmus von 1000 zur Basis 10
- $10^{\boxed{-2}} = 0.01$ → $\underline{-2}$ ist der Logarithmus von 0.01 zur Basis 10
- $2^{\boxed{4}} = 16$ → $\underline{4}$ ist der Logarithmus von 16 zur Basis 2
- $0.5^{\boxed{-1}} = 2$ → $\underline{-1}$ ist der Logarithmus von 2 zur Basis 0.5
- $\log_5(625) = 4$ → $5^4 = 625$

Merke: → Logarithmen sind Exponenten ←

Definition: Die eindeutig bestimmte Lösung der Exponentialgleichung $a^x = p$ (mit $p > 0$ und $a > 0$ mit $a \neq 1$) heisst **Logarithmus von p zur Basis a**, geschrieben $x = \log_a(p)$.

Die Zahl a wird als **Basis** und die Zahl p als **Argument (Numerus)** bezeichnet.

Beispiele:

1)	$\log_5(25) = 2$	*Frage:* $5^{?} = 25$
2)	$\log_3(81) = 4$	*Frage:* $3^{?} = 81$
3)	$\log_2(0.25) = -2$	*Frage:* $2^{?} = 0.25$
4)	$\log_7(7) = 1$	*Frage:* $7^{?} = 7$
5)	$\log_{10}(1'000'000) = 6$	*Frage:* $10^{?} = 1'000'000$

1

Anwendungen

a) Die **Avogadro-Konstante** $N_A = 6.02214179 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ beschreibt die Anzahl vorhandener Moleküle in einem Mol eines chemischen Stoffes.

Diese grosse Zahl hat insgesamt 24 Stellen und beginnt mit den Ziffern 602214179 ...

$$24 = 23 + 1$$

b) Die grösste bis heute (= 10. März 2026) bekannte Primzahl ist: $2^{136'279'841} - 1$

Wie viele Stellen hat diese Zahl und mit welchen Ziffern beginnt sie?

Idee:

Schreibe die Primzahl in wissenschaftlicher Schreibweise $k \cdot 10^x$

$$2^{136'279'841} \overset{!}{=} 10^x$$

$$x = \log\left(2^{136'279'841}\right)$$

$$x = 136'279'841 \cdot \log(2)$$

$$x \overset{TR}{\approx} 41024319.95$$

Erste Ziffern

8912509 .....

$$10^{41024319.95} = 10^{41024319 + 0.95}$$

$$= \underbrace{10^{0.95}}_{= 8.912509...} \cdot 10^{41024319}$$

Anzahl Stellen

41024319 + 1

Logarithmengesetze

Unter Verwendung der Potenzgesetze finden wir, dass

$$\begin{array}{c} 512 = 2^{9} \\ \| \\ 4 \cdot 128 = 2^{2} \cdot 2^{7} = 2^{2+7}. \end{array}$$

Die Gleichheit der roten Exponenten $9 = 2 + 7$ übersetzt sich in „Logarithmensprache“ zu

$$\begin{array}{ccccc} \log_2(4 \cdot 128) & = & \log_2(4) & + & \log_2(128) \\ 9 & = & 2 & + & 7. \end{array}$$

Der 2er-Logarithmus des Produkts $4 \cdot 128$ entspricht also gerade der

____

Das ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz der folgenden Rechenregeln für Logarithmen, den Logarithmengesetzen.

Logarithmengesetze

Sind x und y positive reelle Zahlen und a eine positive reelle Zahl mit $a \neq 1$, so gilt:

(1) $$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

(2) $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

(3) $$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)\ ,\ r \in \mathbb{R}$$

Die Logarithmengesetze setzen Rechenoperationen um eine Stufe herunter!

Schematisch

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$	Produkt zu Summe

$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$	Quotient zu Differenz
$\log(x^r) = r \cdot \log(x)$	Potenz zu Produkt
$\log(x+y) = ???$	Keine Regel

(Summe am Grundlegensten)

Mithilfe der grundlegenden Eigenschaft

$$p = a^{\log_a(p)}$$

lassen sich die Logarithmengesetze direkt aus den Potenzgesetzen herleiten:

- «Produkt zu Summe»

$$x \cdot y = a^{\log_a(x \cdot y)}$$
$$||$$
$$a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$

- «Quotient zu Summe»

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}$$
$$||$$
$$\frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = a^{\log_a(x)-\log_a(y)}$$

- «Potenz zu Produkt»

$$x^r = a^{\log_a(x^r)}$$
$$||$$
$$\left(a^{\log_a(x)}\right)^r = a^{r \cdot \log_a(x)}$$

Kontrollaufgabe 1

Zerlege die Logarithmen so weit wie möglich.

a) $\log_2\left(\frac{b}{cd}\right)$ $= \log_2(b) - \log_2(c \cdot d)$

$= \log_2(b) - \log_2(c) - \log_2(d)$

b) $\log_c\left(\frac{c^2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)$ $= \log_c(c^2) + \log_c(\sqrt{a}) - \log_c(\sqrt[3]{b})$

$= 2 \cdot \log_c(c) + \log_c(a^{\frac{1}{2}}) - \log_c(b^{\frac{1}{3}})$

$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \log_c(a) - \frac{1}{3} \log_c(b)$

Kontrollaufgabe 2

Drücke den Term durch einen einzigen Logarithmusterm aus.
(auf das Notieren der Logarithmusbasis wird verzichtet.)

a) $5\log(2) - 3\log(3)$

$= \log(2^5) - \log(3^3) = \log\left(\frac{32}{27}\right)$

b) $\log(2) + 3\log(a) - 4\log(m) + \frac{1}{2}\log(n)$

$= \log(2) + \log(a^3) - \log(m^4) + \log(\sqrt{n})$

$= \log\left(\frac{2 \cdot a^3 \cdot \sqrt{n}}{m^4}\right)$

Beispiel 1

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Variablen x.

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\underbrace{2 \cdot \log_4(2) + \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(\sqrt[3]{a})} - \log_{10}\left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{10}}{10^{-2}}\right)} = 0$$

$$\log_4(2^2) + \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(a^{1/3})} - \left(\log_{10}(\sqrt{x}) + \log_{10}(\sqrt{10}) - \log_{10}(10^{-2})\right)$$

$$1 + \frac{\log_{10}(a)}{\frac{1}{3} \cdot \log_{10}(a)} - \left(\frac{1}{2} \log_{10}(x) + \frac{1}{2} \log_{10}(10) + 2 \cdot og_{10}(10) \right)$$

Also:

$$1 + 3 - \frac{1}{2} \log_{10}(x) - \frac{1}{2} - 2 = 0$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \log_{10}(x)$$

$$3 = \log_{10}(x)$$

$$\underline{\underline{x = 10^3 = 1000}}$$

Exponentialgleichungen

Einstiegsbeispiel:

Löse folgende Gleichung nach x auf:

$$2^x = 500 \quad \Big| \log_2(\ )$$

$$\log_2(2^x) = \log_2(500)$$

$$x \cdot \log_2(2) = \log_2(500)$$

$$\underline{\underline{x = \log_2(500)}}$$

Eine Gleichung bei der die Unbekannte x nur im **Exponenten** auftritt heisst Exponentialgleichung. Im Folgenden besprechen wir drei verschiedene Lösungsmethoden für solche Gleichungen.

Exponentenvergleich: Bringe die Gleichung auf die Form $a^{T_1(x)} = a^{T_2(x)}$

und vergleiche anschliessend die beiden Exponenten miteinander: $T_1(x) = T_2(x)$

1. $5^{-x} = 5 \cdot 5^{2x}$

$$5^{-x} = 5^1 \cdot 5^{2x}$$

$$5^{-x} = 5^{1+2x}$$

Exponentenvergleich:

$$-x = 1 + 2x$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{3}}}$$

2. $2^{x-3} = \sqrt{2}^x$

$$2^{x-3} = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$x - 3 = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 3$$

$$\underline{\underline{x = 6}}$$

Separieren und danach Logarithmieren: Bringe die Gleichung auf die Form $a^{T(x)} = p$ und wende anschliessend die Definition des Logarithmus an: $T(x) = \log_a(p)$.

3. $3^x = 2^{x+1}$

$$3^x = 2^x \cdot 2$$
$$2 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$
$$\underline{\underline{x = \log_{\frac{3}{2}}(2)}}$$

4. $8 \cdot 3^{-x} = 5^x$

$$8 = 3^x \cdot 5^x$$
$$8 = (15)^x$$
$$\underline{\underline{x = \log_{15}(8)}}$$

Logarithmieren ohne Separieren: Wende direkt einen geeigneten Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung an und berechne x anhand der Logarithmengesetze.

5. $3^{2x} = 5^{x+3}$

$$2x = \log_3(5^{x+3})$$
$$2x = (x+3) \cdot \log_3(5)$$
$$2x = \log_3(5) \cdot x + 3 \cdot \log_3(5)$$
$$(2 - \log_3(5)) \cdot x = 3 \cdot \log_3(5)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{3 \cdot \log_3(5)}{2 - \log_3(5)}}}$$

6. $5^x = 2 \cdot 7^{x+1}$

$$x = \log_5(2 \cdot 7^{x+1})$$
$$x = \log_5(2) + (x+1) \cdot \log_5(7)$$
$$(1 - \log_5(7)) \cdot x = \log_5(2) + \log_5(7)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{\log_5(2) + \log_5(7)}{1 - \log_5(7)}}}$$

Löse die Exponentialgleichungen mit einer Methode deiner Wahl auf 4 Nachkommastellen genau:

a. $2^x = 16 \cdot 2^{3x}$

$2^x = 2^4 \cdot 2^{3x}$

$x = 3x + 4$

$-2x = 4$

$\underline{\underline{x = -2}}$

b. $5 \cdot 6^{2x} = 6 \cdot 5^{2x}$ $\quad | \; : 6 \;, \; : 6^{2x}$

$\frac{5}{6} = \frac{5^{2x}}{6^{2x}}$

$\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2x}$ Exponentenvergleich: $2x = 1$

$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

c. $5^{-x} = 125$

$\log_5(5^{-x}) = \log_5(125)$

$-x = \log_5(5^3)$

$-x = 3$

$\underline{\underline{x = -3}}$

9

Kontrollaufgabe 3

Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach x auf.

a) $2^x = 7^{x-2}$

b) $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1}$

a) $2^x = 7^{x-2} \quad | \cdot 7^2$

$7^2 \cdot 2^x = 7^x \quad | : 2^x$

$7^2 = \frac{7^x}{2^x} \quad | \text{ TU}$

$49 = \left(\frac{7}{2}\right)^x$

$x = \log_{\frac{7}{2}}(49)$

b) $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1} \quad | : 4, \cdot 3^{2x}$

$\frac{7 \cdot 3}{4} = 4^{2x} \cdot 3^{2x}$

$\frac{21}{4} = (12)^{2x}$

$\frac{21}{4} = (144)^x$

$x = \log_{144}\left(\frac{21}{4}\right)$

$\mathcal{K}$ontrollaufgabe 4

Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach x auf.

a) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

b) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x} = 3^{2x-1}$

a)

$$2^{x+1} + 2^{x+2} = 48 \quad | \text{ TU}$$

$$2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 4 = 48 \quad | \text{ TU}$$

$$2^x \cdot (2+4) = 48 \quad | :6$$

$$2^x = 8$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

b)

$$2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 3^{2x-1} \quad | \; 2^x \text{ ausklammern}$$

$$2^x \cdot (2+5) = 3^{2x-1} \quad | \cdot 3$$

$$2^x \cdot 21 = 3^{2x} \quad | :2^x$$

$$21 = \frac{3^{2x}}{2^x} \quad | \text{ TU}$$

$$21 = \frac{9^x}{2^x}$$

$$\underline{\underline{x = \log_{\frac{9}{2}}(21)}}$$

Beispiel 2 – Zurückführen auf quadratische Gleichungen

Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichung:

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot (3^x)^2 = 27 \cdot 3^x - 34$$

$$5 \cdot (3^x)^2 - 27 \cdot 3^x + 34 = 0$$

$$3^x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 5 \cdot 34}}{10}$$

$$= \frac{27 \pm 7}{10} \quad \begin{cases} 2 \\ \frac{17}{5} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x = \log_3(2) \text{ und } x = \log_3\left(\frac{17}{5}\right)}}$$

Kontrollaufgabe 5

Löse die folgende Exponentialgleichungen nach x auf:

$$3 \cdot 5^{x+2} = 50 + 25^{x+1}$$

$$75 \cdot 5^x = 50 + 25 \cdot 5^{2x}$$

$$0 = 25 \cdot 5^{2x} - 75 \cdot 5^x + 50$$

$$5^x = \frac{75 \pm \sqrt{625}}{25}$$

$$= \frac{75 \pm 25}{25} \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x = \log_5(4) \text{ und } x = \log_5(2)}}$$