

6. Gleichungen mit Logarithmen

Repetition

- $10^{\square} = 1000 \rightarrow$ ___ ist der Logarithmus von 1000 zur Basis 10
- $10^{\square} = 0.01 \rightarrow$ ___ ist der Logarithmus von 0.01 zur Basis 10
- $2^{\square} = 16 \rightarrow$ ___ ist der Logarithmus von 16 zur Basis 2
- $0.5^{\square} = 2 \rightarrow$ ___ ist der Logarithmus von 2 zur Basis 0.5
- $\log_5(625) = 4 \rightarrow$ =

Merke: \rightarrow Logarithmen sind Exponenten \leftarrow

Definition: Die eindeutig bestimmte Lösung der Exponentialgleichung $a^x = p$ (mit $p > 0$ und $a > 0$ mit $a \neq 1$) heisst **Logarithmus von p zur Basis a** , geschrieben $x = \log_a(p)$.

Die Zahl a wird als **Basis** und die Zahl p als **Argument (Numerus)** bezeichnet.

Beispiele:

1) $\log_5(25) =$ *Frage:* $5^? = 25$

2) $\log_3(81) =$ *Frage:* $3^? = 81$

3) $\log_2(0.25) =$ *Frage:*

4) $\log_7(7) =$ *Frage:*

5) $\log_{10}(1\,000\,000) =$ *Frage:*

Anwendungen

- a) Die **Avogadro-Konstante** $N_A = 6.02214179 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ beschreibt die Anzahl vorhandener Moleküle in einem Mol eines chemischen Stoffes.

Diese grosse Zahl hat insgesamt 24 Stellen und beginnt mit den Ziffern 602214179 ...

- b) Die grösste bis heute (= 10. März 2026) bekannte Primzahl ist: $2^{136'279'841} - 1$

Wie viele Stellen hat diese Zahl und mit welchen Ziffern beginnt sie?

Idee:

Schreibe die Primzahl in wissenschaftlicher Schreibweise $K \cdot 10^x$

$$2^{136'279'841} \approx 10^x$$

$$x = \log(2^{136'279'841})$$

$$x = 136'279'841 \cdot \log(2)$$

$$x = 41024319.95$$

$$10^{41024319.95} = 10^{\{41024319 + 0.95\}} = 10^{0.95} \cdot 10^{41024319} \text{ Anzahl Stellen} = 41024319 + 1$$

Ersten Ziffern

8912

Logarithmengesetze

Unter Verwendung der Potenzgesetze finden wir, dass

$$\begin{aligned} 512 &= 2^9 \\ &\parallel \\ 4 \cdot 128 &= 2^2 \cdot 2^7 = 2^{2+7}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit der roten Exponenten $9 = 2 + 7$ übersetzt sich in „Logarithmensprache“ zu

$$\begin{aligned} \log_2(4 \cdot 128) &= \log_2(4) + \log_2(128) \\ 9 &= 2 + 7. \end{aligned}$$

Der 2er-Logarithmus des Produkts $4 \cdot 128$ entspricht also gerade der

Das ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz der folgenden Rechenregeln für Logarithmen, den Logarithmengesetzen.

Logarithmengesetze

Sind x und y positive reelle Zahlen und a eine positive reelle Zahl mit $a \neq 1$, so gilt:

$$(1) \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$(2) \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$(3) \quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x), \quad r \in \mathbb{R}$$

Die Logarithmengesetze setzen Rechenoperationen um eine Stufe herunter!

Schematisch

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$	Produkt zur Summe
---------------------------------------	-------------------

$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$	Quotient zu Differenz
$\log(x^r) = r \cdot \log(x)$	Potenz zu Produkt
$\log(x + y) = ???$	keine Formel möglich -> Summe ist am grundlegendsten

Mithilfe der grundlegenden Eigenschaft

$$p = a^{\log_a(p)}$$

lassen sich die Logarithmengesetze direkt aus den Potenzgesetzen herleiten:

- «Produkt zu Summe»

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= a^{\log_a(x \cdot y)} \\
 &\parallel \\
 a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} &= a^{\log_a(x) + \log_a(y)}
 \end{aligned}$$

- «Quotient zu Summe»

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{y} &= a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)} \\
 &\parallel \\
 \frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} &= a^{\log_a(x) - \log_a(y)}
 \end{aligned}$$

- «Potenz zu Produkt»

$$\begin{aligned}
 x^r &= a^{\log_a(x^r)} \\
 &\parallel \\
 (a^{\log_a(x)})^r &= a^{r \cdot \log_a(x)}
 \end{aligned}$$

Kontrollaufgabe 1

Zerlege die Logarithmen so weit wie möglich.

a) $\log_2 \left(\frac{b}{cd} \right)$

b) $\log_c \left(\frac{c^2 \sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} \right)$

Kontrollaufgabe 2

Drücke den Term durch einen einzigen Logarithmustrm aus.
(auf das Notieren der Logarithmusbasis wird verzichtet.)

a) $5 \log(2) - 3 \log(3)$

b) $\log(2) + 3 \log(a) - 4 \log(m) + \frac{1}{2} \log(n)$

Beispiel 1

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Variablen x .

$$2 \cdot \log_4(2) + \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(\sqrt[3]{a})} - \log_{10}\left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{10}}{10^{-2}}\right) = 0$$

$$\frac{\log_4(2^2)}{= 1}$$

$$\frac{\cancel{\log_{10}(a)}}{\frac{1}{3} \cancel{\log_{10}(a)}} - \log_{10}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{10^{-2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 1} = 3 \quad \text{Bruch umdrehen}$$

$$= 1 + 3 - \log_{10}\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= 1 + 3 - (\log_{10}(x^{\frac{1}{2}}) + \log_{10}(10^{\frac{5}{2}}))$$

$$= 1 + 3 - \frac{1}{2} \log_{10}(x) - \frac{5}{2} \cdot \log_{10}(10) = 1$$

$$= 4 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log_{10}(x) = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\frac{1}{2} \log_{10}(x) = \frac{3}{2}$$

$$\log_{10}(x) = 3$$

$$x = 10^3 = 1000$$

Exponentialgleichungen

$$a > 0, a \neq 1$$

Einstiegsbeispiel:

Löse folgende Gleichung nach x auf:

$$2^x = 500$$

$$\begin{aligned} & \left(\log_2 \mid \right) \\ \log_2(2^x) &= \log_2(500) \\ x \cdot \log_2(2) &= \log_2(500) \\ x &= \log_2(500) \end{aligned}$$

Eine Gleichung bei der die Unbekannte x nur im **Exponenten** auftritt heisst Exponentialgleichung. Im Folgenden besprechen wir drei verschiedene Lösungsmethoden für solche Gleichungen.

Exponentenvergleich: Bringe die Gleichung auf die Form $a^{T_1(x)} = a^{T_2(x)}$

und vergleiche anschliessend die beiden Exponenten miteinander: $T_1(x) = T_2(x)$

1. $5^{-x} = 5 \cdot 5^{2x}$

$$5^{-x} = 5^{1+2x}$$

$$-x = 1 + 2x$$

$$-1 = 3x$$

$$-\frac{1}{3} = x$$

2. $2^{x-3} = \sqrt{2^x}$

$$2^{x-3} = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$x-3 = \frac{x}{2}$$

$$2x-6 = x$$

$$x = 6$$

Separieren und danach Logarithmieren: Bringe die Gleichung auf die Form $a^{T(x)} = p$ und wende anschliessend die Definition des Logarithmus an: $T(x) = \log_a(p)$.

3. $3^x = 2^{x+1}$

$$3^x = 2^x \cdot 2 \quad | : 2^x$$

$$\frac{3^x}{2^x} = 2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2, \quad x = \log_{\frac{3}{2}}(2)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{L_a} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{L_p}$

4. $8 \cdot 3^{-x} = 5^x$

$$8 \cdot 3^{-x} = 5^x \quad | \cdot 3^x$$

$$8 = 3^x \cdot 5^x$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{L_p} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{L_a}$

$$8 = (3 \cdot 5)^x$$

$$x = \log_{15}(8)$$

Logarithmieren ohne Separieren: Wende direkt einen geeigneten Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung an und berechne x anhand der Logarithmengesetze.

5. $3^{2x} = 5^{x+3}$

$$3^{2x} = 5^{x+3}$$

$$2x = \log_3(5^{x+3})$$

$$2x = (x+3) \cdot \log_3(5)$$

$$2x - \log_3(5) \cdot x = 3 \cdot \log_3(5) \quad | \text{TK}$$

6. $5^x = 2 \cdot 7^{x+1}$

$$\log_3(-)$$

$$- \log_3(5) \cdot x$$

$$- \log_3(5) \cdot x$$

Löse die Exponentialgleichungen mit einer Methode deiner Wahl auf 4 Nachkommastellen genau:

a. $2^x = 16 \cdot 2^{3x}$

$$2^x = 2^4 \cdot 2^{3x}$$

$$x = 4 + 3x$$

$$-4 = 2x$$

$$-2 = x$$

b. $5 \cdot 6^{2x} = 6 \cdot 5^{2x}$

$$5 = \frac{6 \cdot 5^{2x}}{6^{2x}}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5^{2x}}{6^{2x}}$$

$$\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2x}$$

$$1 = 2x$$

$$0,5 = x$$

c. $5^{-x} = 125$

$$5^{-x} = 5^3$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

Kontrollaufgabe 3

Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach x auf.

a) $2^x = 7^{x-2}$

b) $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1}$

Kontrollaufgabe 4

Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach x auf.

a) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

b) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 3^{2x-1}$

Beispiel 2 – Zurückführen auf quadratische Gleichungen

Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichung:

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot (3^x)^2 = 3^3 \cdot 3^x - 34 \leftarrow \text{Quadratische Gleichung in } 3^x = z$$

$$5 \cdot (3^x)^2 - 27 \cdot 3^x + 34 = 0$$

$$z = 3^x \quad 5 \cdot z^2 - 27 \cdot z + 34 = 0$$

$$\left\{ \frac{17}{5} \right\} \{2\} = z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 5 \cdot 34}}{10}$$

$$3^x = 2$$

$$3^x = \frac{17}{5}$$

$$x = \log_3(2)$$

$$x = \log_3\left(\frac{17}{5}\right)$$

Kontrollaufgabe 5

Löse die folgende Exponentialgleichungen nach x auf:

$$3 \cdot 5^{x+2} = 50 + 25^{x+1}$$

$$3 \cdot 25 \cdot 5^x = 50 + 25^x \cdot 25$$

$$75 \cdot 5^x = 50 + 5^{2x} \cdot 25$$

$$0 = 25 \cdot 5^{2x} - 75 \cdot 5^x + 50$$

$$\{2\} \{1\} = 5^x = \frac{75 \pm \sqrt{625}}{50}$$

$$1 = 5^x \quad 2 = 5^x$$

$$x = \log_5(1) \quad x = \log_5(2)$$