6. Gleichungen mit Logarithmen

Repetition

- $10^{\square} = 1000$ ➔ ____ ist der Logarithmus von 1000 zur Basis 10
- $10^{\square} = 0.01$ ➔ ____ ist der Logarithmus von 0.01 zur Basis 10
- $2^{\square} = 16$ ➔ ____ ist der Logarithmus von 16 zur Basis 2
- $0.5^{\square} = 2$ ➔ ____ ist der Logarithmus von 2 zur Basis 0.5
- $\log_5(625) = 4$ ➔ $=$

Merke: ➔ Logarithmen sind Exponenten 🡐

Definition: Die eindeutig bestimmte Lösung der Exponentialgleichung $a^x = p$ (mit $p > 0$ und $a > 0$ mit $a \neq 1$) heisst **Logarithmus von p zur Basis a**, geschrieben $x = \log_a(p)$.

Die Zahl a wird als **Basis** und die Zahl p als **Argument (Numerus)** bezeichnet.

Beispiele:

1) $\log_5(25) =$ *Frage:* $5^{?} = 25$

2) $\log_3(81) =$ *Frage:* $3^{?} = 81$

3) $\log_2(0.25) =$ *Frage:*

4) $\log_7(7) =$ *Frage:*

5) $\log_{10}(1'000'000) =$ *Frage:*

Anwendungen

a) Die **Avogadro-Konstante** $N_A = 6.02214179 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ beschreibt die Anzahl vorhandener Moleküle in einem Mol eines chemischen Stoffes.

Diese grosse Zahl hat insgesamt 24 Stellen und beginnt mit den Ziffern 602214179 ...

b) Die grösste bis heute (= 10. März 2026) bekannte Primzahl ist: $2^{136'279'841} - 1$

Wie viele Stellen hat diese Zahl und mit welchen Ziffern beginnt sie?

Idee:

Schreibe die Priemzahl in wissenschaftlicher Schreibweise K*10^x

2^136'279'841=! 10^x

x = log(2^136'279'841)

x = 136'279'841*log(2)

x = 41024319.95

10^41024319.95 = 10^{41024319 + 95} = 10^0.95 + 10^41024319 Anzahl Stellen = 41024319 + 1

Ersten Ziffern

8912

Logarithmengesetze

Unter Verwendung der Potenzgesetze finden wir, dass

$$
\begin{aligned}
512 &= 2^{9} \\
\| & \\
4 \cdot 128 &= 2^{2} \cdot 2^{7} = 2^{2+7}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichheit der roten Exponenten $9 = 2 + 7$ übersetzt sich in „Logarithmensprache“ zu

$$
\begin{aligned}
\log_2(4 \cdot 128) &= \log_2(4) + \log_2(128) \\
9 \quad &= \quad 2 \quad + \quad 7.
\end{aligned}
$$

Der 2er-Logarithmus des Produkts $4 \cdot 128$ entspricht also gerade der

---

Das ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz der folgenden Rechenregeln für Logarithmen, den Logarithmengesetzen.

Logarithmengesetze

Sind x und y positive reelle Zahlen und a eine positive reelle Zahl mit $a \neq 1$, so gilt:

(1) $\quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(2) $\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(3) $\quad \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x) \ , \ r \in \mathbb{R}$

Die Logarithmengesetze setzen Rechenoperationen um eine Stufe herunter!

Schematisch

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$	Produkt zur Summe

$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$	Quotient zu DIfferenz
$\log(x^r) = \mathrm{r} \cdot \log(x)$	Potenz zu Produkt
$\log(x+y) = ???$	keine Formel möglich -> Summe ist am grundelegesten

Mithilfe der grundlegenden Eigenschaft

$$p = a^{\log_a(p)}$$

lassen sich die Logarithmengesetze direkt aus den Potenzgesetzen herleiten:

- «Produkt zu Summe»

$$x \cdot y = a^{\log_a(x \cdot y)}$$
$$||$$
$$a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$

- «Quotient zu Summe»

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a(\frac{x}{y})}$$
$$||$$
$$\frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = a^{\log_a(x)-\log_a(y)}$$

- «Potenz zu Produkt»

$$x^r = a^{\log_a(x^r)}$$
$$||$$
$$(a^{\log_a(x)})^r = a^{r \cdot \log_a(x)}$$

$\boldsymbol{K}$*ontrollaufgabe* ***1***

Zerlege die Logarithmen so weit wie möglich.

a) $\log_2\left(\frac{b}{cd}\right)$

b) $\log_c\left(\frac{c^2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)$

$\boldsymbol{K}$*ontrollaufgabe* ***2***

Drücke den Term durch einen einzigen Logarithmusterm aus.
(auf das Notieren der Logarithmusbasis wird verzichtet.)

a) $5\log(2) - 3\log(3)$

b) $\log(2) + 3\log(a) - 4\log(m) + \frac{1}{2}\log(n)$

Beispiel 1

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Variablen x.

$$2 \cdot \log_4(2) + \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(\sqrt[3]{a})} - \log_{10}\left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{10}}{10^{-2}}\right) = 0$$

$$\frac{\log_4(2^2)}{= 1}$$

$$\frac{\cancel{\log_{10}(a)}}{\frac{1}{3}\cancel{\log_{10}(a)}} - \log_{10}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{10^{-2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 1} = 3$$

Bruch umdrehen

$$= 1 + 3 - \log_{10}\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= 1 + 3 - \left(\log_{10}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \log_{10}\left(10^{\frac{5}{2}}\right)\right)$$

$$= 1 + 3 - \frac{1}{2}\log_{10}(x) - \frac{5}{2} \cdot \underbrace{\boxed{\log_{10}(10)}}_{=1}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log_{10}(x) = 0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$\frac{1}{2}\log_{10}(x) = \frac{3}{2}$$

$$\log_{10}(x) = 3$$

$$x = 10^3 = 1000$$

Exponentialgleichungen

$a > 0, a \neq 1$

Einstiegsbeispiel:

Löse folgende Gleichung nach x auf:

$$2^x = 500 \quad | \log_{\boxed{2}}(\quad)$$

$$\underbrace{\log_2(2^x)}_{=1} = \log_2(500)$$

$$x \cdot \log_2(2) = \log_2(500)$$

$$x = \log_2(500)$$

Eine Gleichung bei der die Unbekannte x nur im **Exponenten** auftritt heisst Exponentialgleichung. Im Folgenden besprechen wir drei verschiedene Lösungsmethoden für solche Gleichungen.

Exponentenvergleich: Bringe die Gleichung auf die Form $\mathrm{a}^{\mathrm{T}_1(\mathrm{x})} = \mathrm{a}^{\mathrm{T}_2(\mathrm{x})}$

und vergleiche anschliessend die beiden Exponenten miteinander: $\mathrm{T}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{T}_2(\mathrm{x})$

1. $5^{-x} = 5 \cdot 5^{2x}$

$$5^{-x} = 5^{1+2x}$$

$$-x = 1+2x$$

$$-1 = 3x$$

$$-\frac{1}{3} = x$$

2. $2^{x-3} = \sqrt{2}^x$

$$2^{x-3} = 2^{\frac{x}{2}}$$

$$x-3 = \frac{x}{2}$$

$$2x-6 = x$$

$$x = 6$$

Separieren und danach Logarithmieren: Bringe die Gleichung auf die Form $a^{T(x)} = p$ und wende anschliessend die Definition des Logarithmus an: $T(x) = \log_a(p)$.

3. $3^x = 2^{x+1}$

$3^x = 2^x \cdot 2 \quad | : 2^x$

$\frac{3^x}{2^x} = 2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$, $x = \log_{\frac{3}{2}}(2)$

a p

4. $8 \cdot 3^{-x} = 5^x$

$8 \cdot 3^{-x} = 5^x \quad | \cdot 3^x$

$8 = 3^x \cdot 5^x$

$8 = (3 \cdot 5)^x$

p a

$x = \log_{15}(8)$

Logarithmieren ohne Separieren: Wende direkt einen geeigneten Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung an und berechne x anhand der Logarithmengesetze.

5. $3^{2x} = 5^{x+3}$

$3^{2x} = 5^{x+3}$

$2x = \log_3(5^{x+3})$

$2x = (x+3) \cdot \log_3(5)$

$2x - \log_3(5) \cdot x = 3 \cdot \log_3(5)$

$- \log_3(5) \cdot x$

TU

$- \log_3(5) \cdot x$

6. $5^x = 2 \cdot 7^{x+1}$

$\log_3(-)$

Löse die Exponentialgleichungen mit einer Methode deiner Wahl auf 4 Nachkommastellen genau:

a. $2^x = 16 \cdot 2^{3x}$

$2^x = 2^4 \cdot 2^{3x}$

$x = 4 + 3x$

$-4 = 2x$

$-2 = x$

b. $5 \cdot 6^{2x} = 6 \cdot 5^{2x}$

$5 = \frac{6 \cdot 5^{2x}}{6^{2x}}$

$\frac{5}{6} = \frac{5^{2x}}{6^{2x}}$

$\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2x}$

$1 = 2x$

$0,5 = x$

c. $5^{-x} = 125$

$5^{-x} = 5^3$

$-x = 3$

$x = -3$

Kontrollaufgabe 3

Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach x auf.

a) $2^x = 7^{x-2}$

b) $7 \cdot 3^{1-2x} = 4^{2x+1}$

Kontrollaufgabe ***4***

Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach x auf.

a) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

b) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x} = 3^{2x-1}$

Beispiel 2 – Zurückführen auf quadratische Gleichungen

Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichung:

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot (3^x)^2 = 3^3 \cdot 3^x - 34$$ ⇐ Quadratische Gleichung in $3^x = z$

$$5 \cdot (3^x)^2 - 27 \cdot 3^x + 34 = 0$$

$z = 3^x$ $$5 \cdot z^2 - 27 \cdot z + 34 = 0$$

$$\left\{\frac{17}{5}\right\} \{2\} = z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 5 \cdot 34}}{10}$$

$3^x = 2$ $\qquad$ $3^x = \frac{17}{5}$

$x = \log_3(2)$ $\qquad$ $x = \log_3\left(\frac{17}{5}\right)$

K**ontrollaufgabe* ***5

Löse die folgende Exponentialgleichungen nach x auf:

$$3 \cdot 5^{x+2} = 50 + 25^{x+1}$$